Matematika 1, vaje, 10. 11. 2020

1. Naj bo F množica vseh Fibbonacijevih zaporedij, tj. zaporedij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kjer sta a_0 in a_1 poljubni realni števili, za $n \geq 2$ pa velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokaži, da je F vektorski prostor za operaciji

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \text{ in } \alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\},$$

kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Poišči bazo za F in zapiši običajno Fibbonaccijevo zaporedje (tisto z $a_0 = a_1 = 1$) v tej bazi.

$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$, npr. $\{3, 5, 8, 13, \dots\}$

$\{b_n\} = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\}$

običajno seštevanje realnih števil

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots\}$

$\alpha \cdot \{a_n\} = \{\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots\}$

Preverimo, da za ti dve operaciji veljajo vsi aksiomi def. vektorskega prostora:

(VP1) $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = \{b_n + a_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$ (komutativnost)

$\{a_n\} + (\{b_n\} + \{c_n\}) = \{a_n\} + \{b_n + c_n\} = \{a_n + (b_n + c_n)\} =$

$= \{(a_n + b_n) + c_n\} = \dots = (\{a_n\} + \{b_n\}) + \{c_n\}$ (asociativnost)

(VP2) $\underbrace{\{0\} = \{0, 0, 0, \dots\}}$ $\in F$ in velja $\{0\} + \{a_n\} = \{0 + a_n\} = \{a_n\}$ ✓

to je "ničelni vektor" v F

(VP3) $-\{a_n\} = \{-a_n\} = \{-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \dots\} \in F$ in velja

$\{a_n\} + (-\{a_n\}) = \{a_n - a_n\} = \{0\}$, kar je "ničelni vektor" v F. ✓

(VP4) $1 \cdot \{a_n\} = \{1 \cdot a_n\} = \{a_n\}$ ✓ (unitalnost)

(VP5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \{a_n\}) = \alpha \cdot \{\beta a_n\} = \{(\alpha\beta) a_n\} = (\alpha\beta) \cdot \{a_n\}$ ✓

(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot \{a_n\} = \{(\alpha + \beta) a_n\} = \{\alpha a_n + \beta a_n\} = \{\alpha a_n\} + \{\beta a_n\} =$

$\alpha \cdot \{a_n\} + \beta \cdot \{a_n\}$ ✓

(VP7) $\alpha \cdot (\{a_n\} + \{b_n\}) = \{\alpha (a_n + b_n)\} = \{\alpha a_n + \alpha b_n\} = \alpha \cdot \{a_n\} + \alpha \cdot \{b_n\}$ ✓

$(F, +, \cdot)$ je torej res vektorski prostor.

Za "običajno" Fibonaccijevo zap. smatramo $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$.

Baza vektorskega prostora je "največja" linearno neodvisna podmnožica.

$\{a_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, \dots\}$, tj. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$\{f_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$

$\{b_n\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots\}$ $b_0 = 1$, $b_1 = 0$

$\{c_n\} = \{c_0, c_1, \dots\} \in F$ $\underbrace{c_0, c_1}_{\in \mathbb{R}}$, $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$

$c_1\{a_n\} + c_0\{b_n\} = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \dots\} = \{c_n\}$

Torej $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ (zgoraj izbrana) razpenjata F, ker sta lin. neodvisna, tvorita bazo za F.

$$B_F = \{\{a_n\}, \{b_n\}\}$$

Sta res linearno neodvisni? $\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\} = \{0\}$ $(\Longrightarrow \alpha = 0, \beta = 0)$

$\{\beta, \alpha, \alpha+\beta, \dots\} = \{0, 0, 0, \dots\}$, tj $\alpha = 0$ in $\beta = 0$, kar pomeni, da sta $\{a_n\}, \{b_n\} \in F$ res lin. neodvisna.

Koliko je $\dim(F)$? $\dim(F) = 2$.

3. Katere podmnožice v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ – vseh realnih $n \times n$ matrik – so vektorski podprostori? Za tiste, ki so podprostori določi tudi dimenzijo!

(a) Vse matrike, ki imajo na mestu $(1,1)$ element 0. V_a

(b) Vse matrike, ki imajo na izbranem mestu $(1,1)$ element 1. V_b

(c) Vse matrike s celimi elementi, tj. $A = [a_{ij}]$, kjer so $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

(d) Vse zgornje-trikotne matrike.

(e) Vse simetrične matrike; $A = A^{\mathsf{T}}$.

(f) Vse antisimetrične matrike; $A = -A^{\mathsf{T}}$.

(g) Vse obrnljive matrike; podmnožica $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

(h) Vse matrike z determinanto 0, tj. $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

(i) Vse nilpotentne matrike, tj. matrike $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnostjo $N^n = 0$.

(j) Vse zgornje-trikotne nilpotentne matrike. *(Namig: Kaj je na diagonali zgornje-trikotne nilpotentne matrike?)*

S predavanj: $\mathbb{R}^{n\times n}$ je vektorski prostor – za seštevanje matrik in množenje s skalarjem.

S predavanj: $V \subseteq U$ (vekt. prostor) je vektorski podprostor, če velja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$ za vse $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

(a) $V_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}, \dots \right\}$, $\alpha_1 \underset{V_a}{\underset{\cap}{\begin{bmatrix} 0 & \\ & \end{bmatrix}}} + \alpha_2 \underset{V_a}{\underset{\cap}{\begin{bmatrix} 0 & \\ & \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} \overbrace{\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0}^{0} & \\ & \end{bmatrix} \in V_a$

torej je V_a res vektorski podprostor.

Kaj je baza V_a? Vzamemo lahko E_{ij} za $i \neq 1$ in $j \neq 1$, takih je $n^2 - 1$, tj. $\dim(V_a) = n^2 - 1$.

(Baza za $\mathbb{R}^{n\times n}$ je sest. iz $E_{ij} = \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \leftarrow i$, $\uparrow j$)

(b) $V_b = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \right\}$

Vsak vektorski podprostor vsebuje ničelni vektor. V $\mathbb{R}^{n\times n}$ je to $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$, take mat. pa v V_b ni, torej V_b ni vekt. podprostor.

(c) $V_c = \{ [a_{ij}] : a_{ij} \in \mathbb{Z} \}$ $\qquad \overset{\overset{\mathbb{R}}{\cup}}{\alpha} \overset{\overset{V_c}{\cup}}{[a_{ij}]} + \overset{\overset{\mathbb{R}}{\cup}}{\beta} \overset{\overset{V_c}{\cup}}{[b_{ij}]} = \overset{\overset{V_c}{\cup}}{\overbrace{[\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}]}}$,

ali so $\alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \in \mathbb{Z}$? NE NUJNO.

Za npr. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in V_c$, vendar $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/2 & & \cdots & 1/2 \end{bmatrix} \notin V_c$, tj.

V_c <u>ni</u> vektorski podprostor.

(f) $V_f = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A \}$

$A, B \in V_f$, tj. $A^T = -A$ in $B^T = -B$. Tedaj

$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha(-A) + \beta \cdot (-B) = -(\alpha A + \beta B)$,

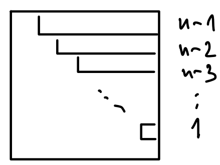
tj. $\alpha A + \beta B \in V_f$ in V_f je vektorski podprostor.

$[a_{ij}]^T = [a_{ji}] = -[a_{ij}]$ ... tj. $a_{ji} = -a_{ij}$ $\leftarrow$ to velja za elemente antisimetrične matrike

Če je $i = j$ ... $a_{ii} = -a_{ii}$, tj. $2a_{ii} = 0$ oz $a_{ii} = 0$,
na diagonali so 0.
Izven diagonale: $a_{ji} = -a_{ij}$.

$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & a_{ij} & \\ -a_{ij} & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, baza za V_f je sest. iz matrik $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ -1 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$,

koliko je takih matrik? $\dim(V_f) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.



(g) $V_g = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{obstaja } A^{-1} \}$,

Ničelna matrika 0 nima inverza, saj $0 \cdot X = X \cdot 0 = 0 \neq I$.

Torej $0 \notin V_g$ in V_g <u>ni</u> vektorski podprostor.

(h) $V_h = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) = 0\}$

$A \in V_h$, tj $\det(A) = 0$, tedaj $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) = \alpha^n \cdot 0 = 0$,
tj. $\alpha A \in V_h$.

Utemeljimo, da V_h kljub temu ni vektorski podprostor:

$$\underset{\substack{\cap \\ V_h \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\substack{\cap \\ V_h \in \mathbb{R}^{2\times 2}}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\notin \\ V_h}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \leftarrow \text{ta ima } \det = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(i) $V_i = \{N \in \mathbb{R}^{n\times n} : N^n = 0\}$

$n=2$ npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2}_{} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = I \neq 0$$

ta ni nilpotentna, torej

$V_i \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ni vekt. podprostor.

Za vsak $n \geq 2$:

preveri to!

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad N^n = 0,$$

zato tudi $(N^T)^n = (N^n)^T = 0$,

vendar

$$(N + N^T)^n = \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ sodo}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}} \text{ ali } \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ liho}}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}} \neq 0,$$

torej $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ni vektorski podprostor za $n \geq 2$.

(Še to: pri $n=1$ je $0^1 = 0$ edina nilpotentna matrika.
Tedaj je $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ dejansko vektorski podprostor.)