Matematika 1, vaje, 8. 12. 2020

11. Linearna preslikava $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa še preko ravnine $z = 0$.

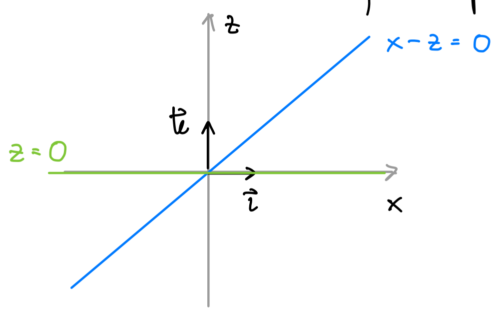
(a) Utemelji, da je ψ izometrija.

(b) Poišči lastne vrednosti izometrije ψ ter tiste lastne vektorje ψ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim.

(c) Katera izometrija je ψ?

(a) ψ je kompozitum dveh zrcaljenj (ki sta izometriji!) in je zato izometrija.

(b) Poiščimo mat., ki pripada ψ v std. bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ za $\mathbb{R}^3$:



zrcaljenje preko $x - z = 0$ ↓ zrcaljenje preko $z = 0$ ↓

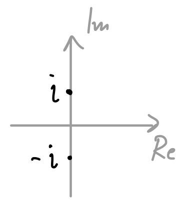
$$\vec{i} \longmapsto \vec{k} \longmapsto -\vec{k}$$
$$\vec{j} \longmapsto \vec{j} \longmapsto \vec{j}$$
$$\vec{k} \longmapsto \vec{i} \longmapsto \vec{i}$$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti ψ so l. vred. A_ψ:

$$\det(A_\psi - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \ldots \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = \pm i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i}$$



Poiščimo še l. vekt. za l. vred. $\lambda_1 = 1$:

$$A_\psi - \lambda_1 I = A_\psi - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 \text{ poljuben} \end{array} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{j}.$$

(c) ψ je zasuk z osjo vrtenja $\vec{v}_1 = \vec{j}$ (last. vektor za l. vred. 1).

Kot vrtenja je kot med $\vec{i}$ in $\psi(\vec{i}) = -\vec{k}$, tj. $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$.

↑ vektor pravokoten na os vrtenja.

oz. $-90^\circ = -\frac{\pi}{2}$.

1. Skiciraj/opiši nekaj (smiselno izbranih) nivojnic in poišči parcialne odvode prvega reda za spodnje funkcije več spremenljivk.

(a) $f(x,y) = x^2 - y + 1$,

(b) $g(x,y) = 3 - xy$,

(c) $h(x,y,z) = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$,

(d) $k(u,v) = \dfrac{\sin(u^2+v^2)}{u^2+v^2}$.

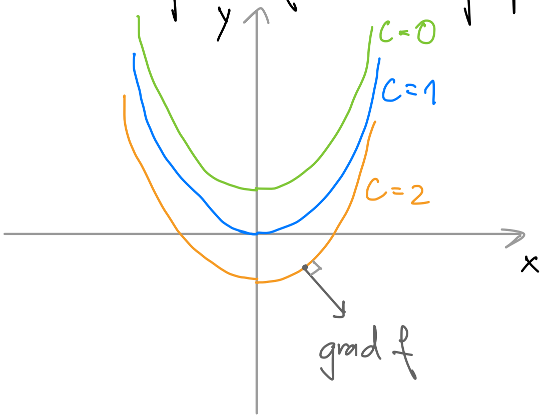
(a) Nivojnice f so rešitve enačb $f(x,y) = C \leftarrow$ konst.

$x^2 - y + 1 = C \quad \dots \quad y = x^2 + 1 - C$ nivojnice f so torej parabole

$C = 1 \dots y = x^2$

$C = 0 \dots y = x^2 + 1$

$C = 2 \dots y = x^2 - 1$



označi za parc. odvod f po spr. x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x - 0 + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) $g(x,y) = 3 - xy$ ... nivojnice $g(x,y) = C \dots 3 - xy = C$

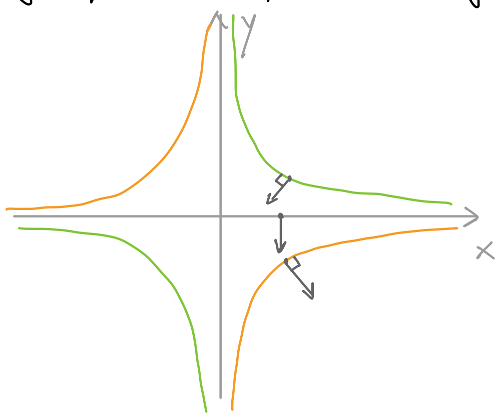
$\dots xy = -C + 3 \dots y = \dfrac{-C+3}{x}$

to so hiperbole

za $C = 2$: $y = \dfrac{1}{x}$

za $C = 4$: $y = -\dfrac{1}{x}$

za $C = 3$: $y = 0$ (oz. $3 - xy = 3$, $xy = 0$)



$$\frac{\partial g}{\partial x} = g_x = -y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = g_y = -x$$

$$\operatorname{grad} g = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

(c) $h(x,y,z) = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2(y+1)\cdot 1 = 2y+2, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = 2(z-1), \quad \operatorname{grad} h = \begin{bmatrix} 2x \\ 2(y+1) \\ 2(z-1) \end{bmatrix}$$

Kaj so nivojnice h? $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = C$, nivojnice so sfere s središčem v $(0,-1,1)$ v $\mathbb{R}^3$.

2. Naj bo $u(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy. = u(y,x)$

(a) Poišči enačbo tangentne ravnine na graf funkcije u skozi točko $T(1,0,u(1,0))$.

(b) Poišči Taylorjev polinom 1. reda funkcije u okrog točke $(1,0)$.

(b) Taylorjev polinom 1. reda funkcije u okrog (x_0,y_0) je:

$$u(x,y) \doteq u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

V našem primeru $(x_0,y_0) = (1,0)$. Poiščimo u_x in u_y:

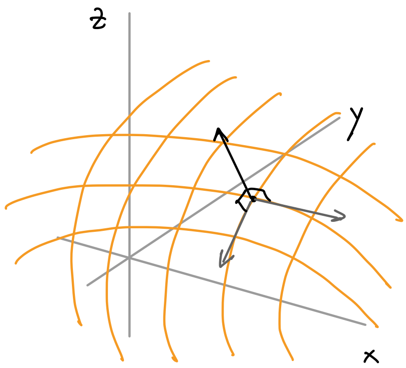
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \text{Poleg tega je } u(1,0) = 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x. \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -3$$

Taylorjev polinom za u okrog $(1,0)$ je torej:

$$u(1,0) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\cdot(x-1) + \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cdot(y-0) = 5 + 3(x-1) - 3y.$$

(a)



$$\underline{z = u(x,y)} \;\ldots\; \underbrace{u(x,y) - z}_{v(x,y,z)} = 0$$

Normalni vektor na graf u skozi točko $(1,0,u(1,0)) = (1,0,5)$ je točno gradient v v tej točki.

$$\operatorname{grad} v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \\ -1 \end{bmatrix} \ldots (\operatorname{grad} v)(1,0,5) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Enačba tangentne ravnine je torej: $3x - 3y - z = -2$.

(Če primerjamo z (b) delom: $z = 5 + 3(x-1) - 3y$

oz. $3x - 3y - z = -2$.)

4. Z uporabo linearne aproksimacije (Taylorjevega polinoma 1. reda okrog ustrezne točke) določi približno vrednost izrazov:

(a) $1.02\log(0.98)$,

(b) $\sin(0.1)e^{-0.2}$.

(a) $f(x,y) = x \log y \quad \dots \quad f(1.02, 0.98)$

$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

$f_x = \log y$ Izberemo $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

$f_y = \frac{x}{y}$

$f(1.02, 0.98) \doteq f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(1.02-1) + f_y(1,1)\cdot(0.98-1) =$

$= 1\cdot\log 1 + \log(1)\cdot 0.02 + \frac{1}{1}\cdot(-0.02) = -0.02$

(b) $f(x,y) = \sin x \cdot e^y$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, torej

$f_x = \cos x \cdot e^y$ $f(0.1, -0.2) \doteq f(0,0) + f_x(0,0)\cdot 0.1 + f_y(0,0)\cdot(-0.2)$

$f_y = \sin x \cdot e^y$ $\underset{\sin(0.1)e^{-0.2}}{\overset{\|}{}} = 0 + 1\cdot 0.1 + 0\cdot(-0.2) = 0.1$.

0.08174...