Matematika 1, vaje, 1. 12. 2020

1. Naj bo $\delta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ operator odvajanja, $\delta(p) = p'$. Določi $\ker\delta$. Prepričaj se, da je $\ker\delta$ edini lastni podprostor za δ. (Kateri lastni vrednosti pripada?)

$\delta : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $\delta(p) = p'$

konstanta

$\ker\delta = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] : p' = 0 \}$ iz $p'(x) = 0$ sledi $p(x) = C$

$\ker\delta = \{ C = 0\cdot x^n + 0\cdot x^{n-1} + \ldots + 0\cdot x + C\cdot 1 : C \in \mathbb{R} \}$, $B_{\ker\delta} = \{1\}$

Kaj so lastni polinomi in lastne vrednosti δ?

$(\delta(p))(x) = \lambda p(x)$ .... $p'(x) = \lambda p(x)$

stopnja $p'(x)$ je $\leq$ stopnji $p(x)$

je $<$, če je stopnja $p \geq 1$
je $=$, če je stopnja p enaka 0.

- Če je stopnja p enaka 0, tj. $p(x) = C$, tedaj

$p'(x) = 0 = \lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot C$, kar pomeni $\lambda = 0$.

- Če je stopnja $p \geq 1$, tj. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

tedaj: $p'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2x + a_1 =$

$= \lambda p(x) = \lambda \cdot (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$,

torej mora veljati $\lambda = 0$, zato $p'(x) = 0 \cdot p(x) = 0$, $p(x) = C$,

kar je protislovje. Ta situacija se ne more zgoditi.

Edina lastna vrednost δ je 0 z lastnim polinomom $p(x) = C$.

L.v. in l.p. bi lahko poiskali tudi z uporabo matrike, ki pripada δ (glede na katerokoli bazo $\mathbb{R}_n[x]$).

Izberimo kar std. bazo $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

$1' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \ldots, (x^n)' = nx^{n-1}$

$$A_\delta = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ & & & & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{array} \end{array}$$

$$N(A_\delta) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : t_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + t_1 \cdot 1 \in \ker \delta$$

Lastne vrednosti δ so lastne vrednosti A_δ, ki so (vse) 0.

2. Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je preslikava $\tau \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = AX - XA.$$

(a) Pokaži, da je τ linearna preslikava. $\leftarrow$ Preveri samostojno!

(b) Določi njeno matriko v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Določi dimenzijo jedra preslikave τ.

(d) Ali lahko τ diagonaliziramo?

(b) $\tau(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_\tau = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

(c) $\dim(\ker \tau) = \dim(N(A_\tau)) = 2$

$$A_\tau \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang}(A_\tau) = 2 = \dim(C(A_\tau))$$

$$\underbrace{\operatorname{rang}(A_\tau)}_{=\,2} + \underbrace{\dim(N(A_\tau))}_{=\,2} = 4$$

(d) Lin. preslikavo τ lahko diagonaliziramo, če ji v neki bazi pripada diagonalna matrika.

To se zgodi točno takrat, ko lahko A_τ diagonaliziramo.

Kaj so l. vrednosti A_τ v našem primeru?

$$\det(A_\tau - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 = 0 \quad \dots \quad \lambda_{1,2,3,4} = 0,$$

tj. 0 je edina lastna vrednost τ

Da bi se τ dalo diagonalizirat, rabimo v lastnem podprostoru za l. vred. 0 4 linearno neodvisne l. matrike.
Lastni podprostor za l. vred. 0 je $\ker \tau$.

$\tau(X) = 0 \cdot X = 0$

Vendar $\dim(\ker \tau) = 2$ ... torej τ ne moremo diagonalizirat.

3. Dani so linearno neodvisni polinomi $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$;

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = 1 - x^2, \quad r(x) = 2 + x.$$

(a) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau(p) = q, \quad \tau(q) = p, \quad \tau(r) = -2r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada τ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(b) Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ še ena linearna preslikava, da je

$$\cancel{\phi(p) = -p, \quad \phi(q) = q, \quad \phi(q) = q + r.}$$

$$\phi(p) = q, \quad \phi(q) = p, \quad \phi(r) = p + q + r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada ϕ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(a) Ker so p, q, r linearno neodvisni in je $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, je $B = \{p, q, r\}$ baza za $\mathbb{R}_2[x]$. Glede na B pripada τ matrika:

$$A_\tau = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} p & q & r \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \end{array}$$

Lastne vrednosti A_τ: $\det(A_\tau - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 1) =$

$$= -(2+\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

to so hkrati lastne vrednosti $\tau \longrightarrow \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 1$

Pri $\lambda_1 = -2$ imamo $\tau(r) = -2r$, tj. $r(x) = 2 + x$ je lastni polinom τ.

Pri $\lambda_2 = -1$: $A_\tau - (-1)I = A_\tau + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$

Pripadajoč lastni polinom je $1 \cdot p - 1 \cdot q + 0 \cdot r = 2x^2$.

Pri $\lambda_3 = 1$ uganemo $p + q = 2 \leftarrow$ lastni polinom za l.v. 1.

V bazi $B' = \{2 + x, 2x^2, 2\}$ pripada τ matrika

$$A'_\tau = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau \text{ lahko diagonaliziramo.}$$

10. Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki najprej rotira za 90° okoli osi x, nato pa zrcali čez (x,z)-ravnino (t.j. ravnino $y = 0$).

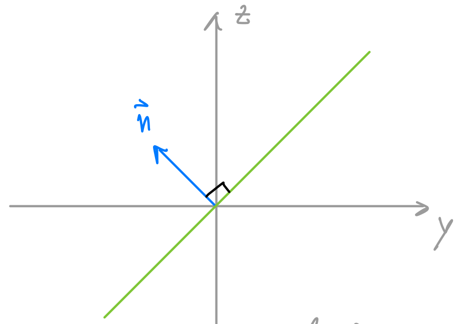
(a) Določi matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

(b) Utemelji, da je ϕ izometrija.

(c) Katera izometrija je ϕ? (zrcaljenje, zasuk, zrcalni zasuk)

(d) Poišči lastne vrednosti izometrije ϕ.

(e) Ali je ϕ enaka preslikavi, ki najprej zrcali čez (x,z)-ravnino, nato pa rotira za 90° okoli osi x?



zasuk, zrcaljenje

$$\begin{aligned} \vec{i} &\longmapsto \vec{i} \longmapsto \vec{i} \\ \vec{j} &\longmapsto \vec{k} \longmapsto \vec{k} \\ \vec{k} &\longmapsto -\vec{j} \longmapsto \vec{j} \end{aligned}$$

(a) $\phi(\vec{i}) = \vec{i}$

$\phi(\vec{j}) = \vec{k}$ $\qquad A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\phi(\vec{k}) = \vec{j}$

(b) ϕ je izometrija, če

$\|\phi(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

- Kompozitum izometrij je izometrija. Tak je tudi ϕ – kompozitum dveh izometrij, je ϕ izometrija.

ali

- S predavanj: Če $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na ortonormirano bazo pripada ortogonalna matrika, je ϕ izometrija.

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je ortonormirana, A_ϕ je ortogonalna $(A_\phi^T A_\phi = I)$, zato je ϕ izometrija.

(c, d) Poiščimo l. vrednosti ϕ ... A_ϕ:

$$\det(A_\phi - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Torej je ϕ zrcaljenje.

Preko katere ravnine zrcali? Tiste, ki ima za normalni vektor lastni vektor za $\lambda_1 = -1$: to je ravno

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$