UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE
V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI

Aleksandra Franc

REŠENE NALOGE IZ LINEARNE ALGEBRE

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2018

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so prirejene iz nalog, ki so se pojavljale na kolokvijih pri predmetu Linearna algebra za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike na FRI med leti 2012 in 2018. Ponavljanju nalog, ki jih rešujemo na vajah, sem se skušala izogniti, ker se zdi tako podvajanje nepotrebno. Nalog z vaj zato v tej zbirki ni.

Pri sestavljanju nalog za kolokvije so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ali še poučujejo ta predmet, za kar se jim iskreno zahvaljujem. Posebej so k nalogam prispevali Damir Franetič, Gregor Jerše, Peter Kink, Jelena Klisara, Janoš Vidali, Damjan Vrenčur in Martin Vuk.

To študijsko gradivo ni recenzirano in gotovo so se v rešitve nalog prikradle napake. Če mislite, da je kakšna rešitev napačna, ste vabljeni, da se oglasite na govorilnih urah.

Naloge znotraj poglavij niso urejene niti po težavnosti niti po podobnosti rešitev. Upam, da vas bo to spodbudilo, da se lotite vsake naloge ne le dveh najlažjih, in da se ne učite rutinskega reševanja posameznih tipov nalog, pač pa za vsako sami razmislite, s katerimi orodji se jo bo dalo rešiti.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⇩ ob nalogi, boste skočili do rešitve. Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi, se boste vrnili k besedilu naloge. Vseeno priporočam, da nalogi posvetite nekaj časa, preden se lotite branja rešitve.

Oznake

$\mathbb{N}$	...	naravna števila
$\mathbb{R}$	...	realna števila
$\mathbb{C}$	...	kompleksna števila
$\vec{a}$	...	vektor
$\overrightarrow{AB}$	...	vektor z začetkom v A in koncem v B
$\vec{r}_A$	...	krajevni vektor točke A
$\lVert\vec{a}\rVert$	...	dolžina (norma) vektorja $\vec{a}$
S_{ABC}	...	ploščina trikotnika ABC
A	...	matrika
A^{T}	...	transponiranka matrike A
$\det A$	...	determinanta matrike A
$C(A)$	...	stolpični prostor matrike A (slika preslikave A)
$N(A)$	...	ničelni prostor matrike A (jedro preslikave A)
V	...	vektorski (pod)prostor
$V^{\perp}$	...	ortogonalni komplement prostora V

Kazalo

POGLAVJE 1

Vektorji in geometrija

NALOGA 1.
Dani sta premici

$$p\colon x-7=\frac{y-1}{2}=z+1 \quad \text{in} \quad q\colon -\frac{x}{2}=\frac{1-y}{3}=z+1.$$

a. Poišči ravnino Σ, ki je vzporedna premici p in vsebuje premico q.
b. Določi pravokotno projekcijo A' točke $A(7,1,-1)$ na ravnino Σ.
c. Zapiši enačbo pravokotne projekcije p' premice p na ravnino Σ.

NALOGA 2.
Tabornik Polde je napel trikotni kos šotorskega platna med točke $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$ in $C(0,3,2)$ ter postavil svetilko v točko $S(3,-1,4)$. Platno na ravnino $z=0$ meče trikotno senco.

a. Katere od točk A, B in C ležijo na ravnini z enačbo $z=0$?
b. Določi točke A', B' in C', ki predstavljajo oglišča sence. (Namig: Določi točke, v katerih premice skozi S in A, B ali C sekajo ravnino $z=0$.)
c. Izračunaj ploščino sence $A'B'C'$.

NALOGA 3.
Oglišča tetraedra $ABCD$ so podana s koordinatami

$$A(0,0,0), \quad B(2,1,0), \quad C(0,2,1) \quad \text{in} \quad D(3,1,5).$$

a. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje trikotnik ABC.
b. Določi enačbo premice p, ki vsebuje točko D in je pravokotna na Σ.
c. Poišči presečišče ravnine Σ in premice p.
d. Izračunaj prostornino tetraedra $ABCD$.

NALOGA 4.
Dani sta ravnina

$$\Sigma\colon 2x+y+2z=9$$

in premica

$$p\colon x=3, y=z.$$

a. Izračunaj kot med premico p in ravnino Σ.
b. Poišči presečišče premice p in ravnine Σ.
c. Poišči pravokotno projekcijo premice p na ravnino Σ.

NALOGA 5.
Prostorski štirikotnik $ABCD$ je podan z naslednjimi koordinatami:

$$A(3,6,3), \quad B(6,3,9), \quad C(-3,3,6) \quad \text{in} \quad D(-3,6,6).$$

a. Ali točke A, B, C in D ležijo na isti ravnini?
b. Projiciraj točke A, B, C in D na ravnino $x+y-z=0$.
c. Ali se projekciji daljic AD in BC sekata? Določi morebitno presečišče!

Naloga 6.
Dana je ravnina Σ na kateri ležijo točke $A(2,1,0), B(0,1,-1)$ in $C(2,3,1)$.

a. Zapiši enačbo ravnine Σ.
b. Določi premico, ki gre skozi točko $T(1,2,3)$ in je pravokotna na ravnino Σ.
c. Izračunaj razdaljo točke T od ravnine Σ.

Naloga 7.
Dane so točke $A(3,1,2)$, $B(6,4,5)$ in $C(9,-2,-1)$.

a. Izračunaj kot med daljicama AB in AC.
b. Določi težišče trikotnika ABC.
c. Zapiši enačbo premice, ki je pravokotna na trikotnik ABC in vsebuje njegovo težišče.

Naloga 8.
Premici p in q sta dani z enačbama

$$p\colon x-1=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2} \quad \text{in} \quad q\colon \frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{2}=-z.$$

a. Poišči presečišče premic p in q.
b. Pod kakšnim kotom se sekata p in q?
c. Zapiši enačbo ravnine Σ, v kateri ležita p in q.

Naloga 9.
Ravnini Σ in Λ sta dani z enačbama

$$\Sigma\colon x+y-2z=0 \quad \text{in} \quad \Lambda\colon x+2y-z=1.$$

a. Poišči parametrizacijo premice p, ki je presek ravnin Σ in Λ.
b. Naj bo Λ' ravnina, ki jo dobiš z zrcaljenjem ravnine Λ preko ravnine Σ. Poišči enačbo ravnine Λ'.

Naloga 10.
Dani sta premica p in ravnina Σ:

$$\begin{aligned} p &: \quad x=\frac{y-1}{2}=z-1, \\ \Sigma &: \quad x-2y+2z=1. \end{aligned}$$

a. Poišči presečišče premice p in ravnine Σ.
b. Določi kot pod katerim se sekata p in Σ.
c. Prezrcali premico p preko ravnine Σ.

Naloga 11.
V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(2,1,4)$, $B(0,0,2)$, $C(1,2,0)$ in $D(3,3,2)$.

a. Pokaži, da je lik $ABCD$ kvadrat in izračunaj njegovo ploščino.
b. Poišči preostala oglišča kocke, ki ima kvadrat $ABCD$ za eno od ploskev. Koliko je takih kock?
c. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko A in vsebuje telesno diagonalo kocke.

Naloga 12.
Dane so točke $A(2,0,4)$, $B(3,2,2)$ in $C(1,1,0)$.

a. Določi koordinate točke D tako, da bo lik $ABCD$ pravokotnik.
b. Poišči enačbo premice p, na kateri leži diagonala BD pravokotnika $ABCD$.
c. Poišči enačbo ravnine Σ, ki je pravokotna na premico p in vsebuje točko A.

NALOGA 13.
Naj bo vektor $\vec{p}$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{u} = [6,0,3]^\mathsf{T}$ na vektor $\vec{a} = [2,2,-1]^\mathsf{T}$.

a. Izračunaj vektor $\vec{p}$.
b. Ali je $\vec{p}$ normala na ravnino Σ z enačbo $4x+4y-2z=0$?
c. Poišči pravokotno projekcijo $\vec{q}$ vektorja $\vec{u}$ na ravnino Σ.

NALOGA 14.
Premica p gre skozi točko $A(1,1,3)$ in ima smerni vektor $\vec{p} = [2,1,3]^\mathsf{T}$. Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje premico p in točko $B(2,1,4)$.

a. Zapiši kanonsko enačbo premice p.
b. Poišči enačbo ravnine Σ.

NALOGA 15.
Premica p gre skozi točko $A(1,1,0)$ in ima smerni vektor $\vec{p} = [0,1,-1]^\mathsf{T}$. Premica q je podana z enačbo

$$q\colon \frac{x+5}{2} = y-5 = \frac{2-z}{2}.$$

Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje premico p in je vzporedna s premico q.

a. Poišči enačbo ravnine Σ.
b. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v} = [-3,3,3]^\mathsf{T}$ na ravnino Σ.

NALOGA 16.
V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(1,0,-1)$, $B(1,2,3)$ in $C(-1,4,5)$.

a. Poišči koordinate take točke D, da bo $ABCD$ paralelogram.
b. Določi enačbo ravnine Σ, v kateri leži paralelogram $ABCD$.
c. Poišči še parametrizacijo premice p, ki je pravokotna na paralelogram $ABCD$ in gre skozi njegovo središče.

NALOGA 17.
Dani so vektorja $\vec{u} = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [2,2,1]^\mathsf{T}$ ter točka $A(1,3,5)$.

a. Zapiši enačbi premic p in q, ki se sekata v točki A in sta vzporedni $\vec{u}$ in $\vec{v}$.
b. Zapiši enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premici p in q.
c. Zapiši enačbe vseh ravnin, ki so od Σ oddaljene za $\sqrt{2}$. Koliko je takih ravnin?

NALOGA 18.
Dane so točke $A(0,-1,3)$, $B(4,0,2)$ in $C(2,0,3)$.

a. Izračunaj ploščino trikotnika ABC.
b. Določi enačbo ravnine skozi A, B in C.
c. Zapiši enačbo premice, ki je pravokotna na trikotnik ABC in gre skozi točko A.

NALOGA 19.
Točke $A(2,1,0)$, $B(3,3,3)$ in $C(1,2,3)$ določajo trikotnik v $\mathbb{R}^3$. Poišči enačbo premice p, ki je na ta trikotnik pravokotna in gre skozi njegovo težišče.

NALOGA 20.
Ravnine Σ_1, Σ_2 in Σ_3 so podane z enačbami

$$\Sigma_1\colon 2x-y-2z=3,$$
$$\Sigma_2\colon 3x+y+2z=2,$$
$$\Sigma_3\colon x-y-5z=-4.$$

Naj bo premica p presečišče ravnin Σ_1 in Σ_2.

a. Zapiši enačbo premice p.
b. Določi presečišče P premice p in ravnine Σ_3.
c. Izračunaj kot med premico p in ravnino Σ_3.

POGLAVJE 2

Sistemi linearnih enačb

NALOGA 21.
Podan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 3, \\ x & + & 3y & - & z & = & 4, \\ 2x & + & 3y & + & (a-1)z & = & 5. \end{array}$$

a. Kako sta rešljivost in število rešitev odvisni od parametra $a \in \mathbb{R}$?
b. V odvisnosti od a zapiši rešitve danega sistema.

NALOGA 22.
Poišči štiri števila, za katera velja:

- njihova vsota je enaka 4,
- razlika med prvim in vsoto ostalih je enaka 3,
- razlika med vsoto prvih dveh in vsoto zadnjih dveh je enaka 2 in
- razlika med vsoto prvih treh in zadnjim je enaka 1.

NALOGA 23.
Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določi tak vektor $\vec{v} = [x, y, z, w]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in za katerega velja $\vec{c} \cdot \vec{v} = \vec{d} \cdot \vec{v} = 1$.

NALOGA 24.
Dan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 3y & + & z & = & 5, \\ -x & + & (a^2-2)y & & & = & a, \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 4. \end{array}$$

a. Za katere vrednosti parametra a ima več rešitev? Poišči te rešitve.
b. Za katere vrednosti parametra a nima nobene rešitve?
c. Za katere vrednosti parametra a ima enolično rešitev? Poišči jo.

Naloga 25.
Dan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1, \\ -x & + & y & + & (a-2)z & = & -1, \\ & + & (a-2)y & + & 2z & = & 0. \end{array}$$

a. Sistem zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$. Za katere a je sistem enolično rešljiv?
b. Poišči rešitve sistema za vse tiste vrednosti parametra a, pri katerih sistem ni enolično rešljiv.
c. Poišči rešitve sistema za vse tiste vrednosti parametra a, pri katerih sistem je enolično rešljiv.

Naloga 26.
Spodnji sistem linearnih enačb zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$ in ga reši z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & + & 3w & = & 3, \\ 2x & & & - & z & - & w & = & 2, \\ x & + & 2y & + & 6z & - & w & = & 3, \\ x & - & 2y & + & 5z & - & 12w & = & -1. \end{array}$$

Naloga 27.
Dani so matrika A in vektorja $\vec{b}_1$ ter $\vec{b}_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a. Ali obstaja vektor $\vec{x}_1$, da je $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$? Ali obstaja vektor $\vec{x}_2$, da je $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$?
b. Poišči vse rešitve sistemov $A\vec{x} = \vec{b}_1$ ter $A\vec{x} = \vec{b}_2$.

Naloga 28.
Reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & & & = & 5, \\ x & & & & & + & w & = & 0, \\ x & + & 3y & + & z & + & w & = & 5, \\ x & & & & & + & 3w & = & 0. \end{array}$$

Naloga 29.
Poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Poišči še rešitev $\vec{x}$, ki ima vsoto komponent enako 0.

Naloga 30.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešujemo sistem enačb $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Za katere vrednosti parametrov u in v ima sistem eno rešitev, nič rešitev ali neskončno rešitev?

POGLAVJE 3

Matrike in sistemi

NALOGA 31.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $(2A + B)X = A(X + I)$.

NALOGA 32.
Reši matrično enačbo

$$AX - I = X - B,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

NALOGA 33.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $AX^\mathsf{T} = X^\mathsf{T} + I - B^\mathsf{T}$.

NALOGA 34.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poiskati želimo tako matriko

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

da bo

$$XA + A^{-1}X = B.$$

Zmnoži in seštej matrike na levi in reši dobljen sistem enačb, da poiščeš matriko X.

Naloga 35.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X, ki reši matrično enačbo

$$AXA^{\mathsf{T}} = B.$$

Naloga 36.
Matrika X slika tri vektorje iz $\mathbb{R}^3$ v tri vektorje v $\mathbb{R}^2$ na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X. Ali je matrika X enolično določena?

Naloga 37.
Dane so matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti želimo matrično enačbo $AXB = C$ z neznano matriko X.

a. Katera od naštetih matrik naj bo A, katera B in katera C, da bo ta matrična enačba smiselna?
b. Poišči matriko X.

Naloga 38.
Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da sta L in U faktorja v LU razcepu matrike A.
b. Naj bo $\vec{b} = [1, 3, 2]^{\mathsf{T}}$. Poišči rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ s pomočjo LU razcepa.
c. Uporabi LU razcep za izračun inverza A^{-1}.

Naloga 39.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči matriko $C = AB$.
b. Poišči LU razcep matrike C brez pivotiranja.
c. Naj bo $\vec{b} = [2, 6, 2]^{\mathsf{T}}$. Z uporabo LU razcepa iz prejšnje točke reši enačbo $C\vec{x} = \vec{b}$.

Naloga 40.
Poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ razlika dveh rešitev sistema. Poišči množico vektorjev, ki so pravokotni na vse možne razlike $\vec{r}$.

Naloga 41.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo $XB = A$.

Naloga 42.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X, ki reši enačbo

$$AXB = A + B.$$

POGLAVJE 4

Determinante

NALOGA 43.
Poišči vse take matrike $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja:

a. X je simetrična,

b. X komutira z matriko $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in

c. $\det(X) = 4$.

NALOGA 44.
Podana je matrika

$$A_n = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Izračunaj $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ in $\det(A_4)$.
b. Poišči rekurzivno zvezo, ki izraža $\det(A_n)$.
c. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je

$$\det(A_n) = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

za vsa naravna števila $n \geq 2$.

NALOGA 45.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik A, A^T, B, AB, $(AB)^{-1}$, AB^{-1} in $(B - A)^{-1}$.

NALOGA 46.
Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo X matrika, za katero velja $X\vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$, $X\vec{b} = \vec{b} - \vec{c}$ in $X\vec{c} = \vec{c} - \vec{a}$.

a. Zapiši matrično enačbo $XG = H$, ki ji zadošča matrika X, tj. izrazi stolpce matrik G in H z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
b. Izračunaj determinanto matrike X, $\det(X)$.
c. Poišči matriko X.

Naloga 47.
Naj bosta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna pravokotna vektorja iz $\mathbb{R}^n$. Izračunaj $\det(I + \vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}})$ in $\det(I - \vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}})$.

Naloga 48.
Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik A, $A - I$, $A^{\mathsf{T}}A$ ter $A^{\mathsf{T}}(A - I)$.

Naloga 49.
Izračunaj determinanti matrik $B^{\mathsf{T}}(B + 2I)$ in $(B + 2I)^{-1}$, če je B matrika

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Naloga 50.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči determinanto matrike X, ki reši enačbo $AX = B$.

Naloga 51.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ t-3 & 3 & t \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči vsa števila $t \in \mathbb{R}$, za katera je determinanta matrike A enaka 0.

Naloga 52.
Poišči vse vrednosti parametra t, za katere bo determinanta matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & t & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{bmatrix}$$

enaka 4.

POGLAVJE 5

Vektorski prostori in linearne preslikave

NALOGA 53.
Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a}\,\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{a},$$

pri čemer je $\vec{a} = [1, 0, 1]^{\mathsf{T}}$.

a. Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči bazi za $\ker(\phi)$ in $\operatorname{im}(\phi)$.

NALOGA 54.
Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima predpis

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{a}),$$

kjer je $\vec{a} = [1, 2, 0]^{\mathsf{T}}$.

a. Preveri, da je ϕ linearna preslikava.
b. Poišči matriko A, ki pripada ϕ glede na standardno bazo $\mathbb{R}^3$.
c. Določi $\ker \phi$ in $\operatorname{im} \phi$.

NALOGA 55.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in naj bo U podmnožica vseh vektorjev $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, za katere velja $A\vec{x} = -A^{\mathsf{T}}\vec{x}$.

a. Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$.
b. Ali sta vektorja $\vec{a} = [1, -1, 1, -1]^{\mathsf{T}}$ in $\vec{b} = [1, 0, 0, -1]^{\mathsf{T}}$ vsebovana v U?
c. Poišči bazo in določi dimenzijo podprostora U.

NALOGA 56.
Za bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ izberemo vektorje

$$\vec{a} = [2, 1, -1]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{b} = [-1, 0, 1]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{c} = [0, -1, 0]^{\mathsf{T}}.$$

Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslika te vektorje po pravilih

$$\phi(\vec{a}) = \vec{a} - \vec{b}, \quad \phi(\vec{b}) = \vec{b} - \vec{c}, \quad \phi(\vec{c}) = \vec{c} - \vec{a}.$$

a. Zapiši matriko A, ki pripada preslikavi ϕ v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
b. Določi inverz P^{-1} prehodne matrike $P = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.
c. Poišči matriko S, ki pripada preslikavi ϕ v standardni bazi.
d. Določi jedro $\ker \phi$. Ali je ϕ injektivna?

NALOGA 57.
Označimo z V množico vseh 2×2 matrik, za katere je

$$\vec{a}^{\mathsf{T}} A \vec{a} = 0,$$

pri čemer je $\vec{a} = [1, -1]^{\mathsf{T}}$. Z $\phi_{\vec{a}} \colon V \to \mathbb{R}^2$ označimo preslikavo, določeno s predpisom

$$A \mapsto A\vec{a}.$$

a. Dokaži, da je V vektorski podprostor v prostoru vseh 2×2 matrik.
b. Določi dimenzijo in bazo podprostora V.
c. Dokaži, da je $\phi_{\vec{a}}$ linearna preslikava.
d. Zapiši matriko preslikave $\phi_{\vec{a}}$ v izbrani bazi in poišči jedro ter sliko.

NALOGA 58.
Preslikava na prostoru 2×2 matrik $\phi \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ naj bo definirana s predpisom

$$\phi(X) = AX - XA,$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.
b. Izrazi matriko linearne preslikave ϕ v bazi prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dani z matrikami

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Določi jedro in sliko linearne preslikave ϕ.

NALOGA 59.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = B^{\mathsf{T}}\vec{x}\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči matriko D, za katero bo $V = C(D)$. Ali je D natančno določena?

NALOGA 60.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazi podprostorov $C(A)$ in $N(A)$.
b. Kateri od vektorjev $\vec{a} = [2, 3, 7, -2]^{\mathsf{T}}$ in $\vec{b} = [2, 0, -2, 2]^{\mathsf{T}}$ leži v $C(A)$? Tistega, ki leži v $C(A)$, izrazi kot linearno kombinacijo stolpcev matrike A.

NALOGA 61.
Podana sta vektorja $\vec{a} = [2, 1, 2]^{\mathsf{T}}$ in $\vec{b} = [1, 2, 2]^{\mathsf{T}}$.

a. Naj bo $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}\}$. Ali je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?

b. Določi matriko A, da bo $U = C(A)$. Kolikšna je dimenzija U? Ali je matrika A enolično določena?

NALOGA 62.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$. Določi $\dim N(A)$ in $\dim C(A)$.
b. Zapiši množico rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ za vektor $\vec{b} = [5, 0, 4, 0]^\mathsf{T}$.
c. Poišči vektor $\vec{x}$, ki reši sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ in je pravokoten na $\vec{b}$. Koliko je takih vektorjev?

NALOGA 63.
Vzemimo $\vec{a} = [1, 1, 0]^\mathsf{T}$. Naj bo V množica vseh vektorjev $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, za katere velja

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{a}.$$

a. Dokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Koliko je $\dim(V)$?
b. Poišči 3×3 matriki A in B, da bo $V = N(A) = C(B)$.

NALOGA 64.
Dani so vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči dimenzijo in bazo linearne ogrinjače V vektorjev $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$.
b. Izrazi vektor $\vec{v}_4$ kot linearno kombinacijo ostalih. Ali je rešitev enolična?

POGLAVJE 6

Ortogonalnost

NALOGA 65.

Vektorski podprostor $V \leq \mathbb{R}^4$ je napet na vektorje

$$v_1 = [1, 2, 0, 2]^\mathsf{T}, \quad v_2 = [2, -1, 2, 0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad v_3 = [2, 1, 2, 0]^\mathsf{T}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za V.
b. Poišči ortonormirano bazo za $V^\perp$.
c. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{x} = [1, 0, 0, 1]^\mathsf{T}$ na V.

NALOGA 66.

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za stolpčni prostor $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za ortogonalni komplement $C(A)^\perp$.
c. Naj bo $\vec{x} = [1, 0, -9, 0]^\mathsf{T}$. Poišči taka vektorja $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^4$, da bo

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,$$

pri tem pa $\vec{x}_1 \in C(A)$ in $\vec{x}_2 \in C(A)^\perp$. Ali sta takšna vektorja $\vec{x}_1$ in $\vec{x}_2$ enolično določena?

NALOGA 67.

Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^4$ je linearna ogrinjača vektorjev

$$\vec{v}_1 = [1, 1, -1, -1]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_2 = [2, 1, -1, 0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_3 = [3, 1, -1, 1]^\mathsf{T}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za V in določi $\dim V$.
b. Poišči ortonormirano bazo za $V^\perp$.
c. Poišči pravokotni projekciji vektorja $\vec{x} = [0, 1, 0, 1]^\mathsf{T}$ na V in $V^\perp$.

NALOGA 68.

Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x + y - 3z = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y = 3z\}.$$

a. Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$.
b. Določi bazi za U in V.
c. Dopolni bazo za U do baze prostora $\mathbb{R}^3$.
d. Določi bazo ortogonalnega komplementa prostora V.

NALOGA 69.

Iščemo funkcijo oblike

$$f(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x},$$

ki bo aproksimirala naslednje podatke:

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	-4	-1	5	2

a. Iz $f(x_i) = y_i$ dobimo predoločen sistem linearnih enačb za c_1 in c_2. Zapiši matriko in desno stran tega sistema.
b. Določi parametra c_1 in c_2 po linearni metodi najmanjših kvadratov tako, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

Naloga 70.

Metka vozi avtomobil s konstantno hitrostjo, njen sovoznik Janko pa si po vsaki uri vožnje zapiše stanje števca kilometrov. Dobi naslednjo tabelo:

t	1	2	3	4
s	150	220	330	420

a. Za hitrost avtomobila v in prevoženo pot $s(t)$ velja zveza $s(t) = vt + s_0$. S pomočjo podatkov iz zgornje tabele zapiši sistem enačb v obliki

$$A \begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

in poišči rešitev dobljenega sistema z linearno metodo najmanjših kvadratov.
b. S kakšno hitrostjo Metka vozi avtomobil? Koliko kilometrov je bilo na števcu pred začetkom vožnje?
c. Oceni stanje na števcu kilometrov po peti uri vožnje.

Naloga 71.

Poišči tisti vektor $\vec{x}$, ki je po metodi najmanjših kvadratov najboljši približek za rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Naloga 72.

V $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo podprostora U.
b. V tej ortonormirani bazi zapiši pravokotno projekcijo vektorja $\vec{u} = [1, 2, 3, 4]^\mathsf{T}$ na podprostor U.

Naloga 73.

Naj bosta $\vec{u} = [1, -2, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [2, 2, 1]^\mathsf{T}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$.

a. Zapiši projekcijsko matriko P na podprostor, ki ga napenjata vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$.

b. Izračunaj $P\vec{x}$ za $\vec{x} = [9, 9, 9]^\mathsf{T}$.
c. Izrazi vektor $P\vec{x}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$.

NALOGA 74.
Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$,

$$V = \{[x, y, x + y]^\mathsf{T} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a. Poišči bazo prostora V.
b. Poišči ortonormirano bazo prostora V.
c. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [2, 1, 0]^\mathsf{T}$ na V.

NALOGA 75.
Podmnožica $V \subset \mathbb{R}^3$ je podana z naslednjim opisom:

$$V = \{[x, y, z]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}.$$

a. Pokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči bazo prostora V.
c. Poišči bazo ortogonalnega komplementa $V^\perp$.
d. Zapiši $\vec{a} = [2, 1, 3]^\mathsf{T}$ kot vsoto pravokotnih projekcij na V in $V^\perp$.

NALOGA 76.
Za matriko A in vektor $\vec{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

poišči pravokotno projekcijo $\vec{b}$ na stolpčni prostor $C(A)$ matrike A.

NALOGA 77.
Poišči ortonormirano bazo podprostora V v $\mathbb{R}^5$, ki ga napenjajo vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

NALOGA 78.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za podprostor $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za podprostor $C(A)^\perp$.

NALOGA 79.
Vrednost funkcije f je podana v štirih točkah:

$$f(3) = 7, \quad f(1) = -1, \quad f(-1) = 8 \quad \text{in} \quad f(-3) = 16.$$

Z metodo najmanjših kvadratov poišči enačbo kvadratne funkcije $g(x) = ax^2 + bx + c$, ki se najbolj prilega funkciji f v omenjenih štirih točkah.

NALOGA 80.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$.
b. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [5, 3, -2]^\mathsf{T}$ na $C(A)^\perp$.
c. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $C(A)$.

NALOGA 81.
Podatke v tabeli

x_i	0	1	2	3
y_i	-5	-2	4	3

bi radi aproksimirali s funkcijo oblike

$$f(x) = ax + b.$$

Določi konstanti a in b tako, da bo $f(x_i)$ najboljša aproksimacija za y_i po metodi najmanjših kvadratov.

NALOGA 82.
Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

in ortonormirano bazo ničelnega prostora $N(A^\mathsf{T})$ matrike A^T.

NALOGA 83.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonomirano bazo za $C(A)$.
b. Poišči ortonomirano bazo za $C(A)^\perp$.
c. Projiciraj vektor $\vec{a} = [5, 2, 4, 0]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.

NALOGA 84.
Poišči ortonormirano bazo linearne lupine vektorjev

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

nato pa to bazo dopolni do ortonormirane baze celega $\mathbb{R}^3$.

POGLAVJE 7

Lastne vrednosti

NALOGA 85.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Poišči prehodno matriko P in diagonalno matriko D, da bo veljalo $A = PDP^{-1}$. Nato izračunaj A^{2020}. Ali lahko (v tem primeru) to storiš, ne da bi izračunal P^{-1}?

NALOGA 86.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

a. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.
b. Ali je A diagonalizabilna? Če je, poišči matriki P in D, da bo $A = PDP^{-1}$, sicer pa povej, zakaj ne.

NALOGA 87.
Zaporedje (a_n) je dano z rekurzivno zvezo

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 3$ ter $a_1 = 7$. S spodnjimi koraki določi eksplicitno formulo za a_n.

a. Poišči tako matriko A, da lahko zgornjo rekurzivno zvezo zapišeš v obliki
$$\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$$
za vektor $\vec{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$.
b. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
c. Poišči eksplicitno formulo za a_n.

NALOGA 88.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je $\lambda_1 = -2$ lastna vrednost matrike A in poišči pripadajoči lastni vektor $\vec{v}_1$.
b. Pokaži, da je $\vec{v}_2 = [0, 1, 0]^\mathsf{T}$ lastni vektor matrike A in določi pripadajočo lastno vrednost λ_2.

c. Poišči še tretjo lastno vrednost ter določi njeno algebraično in geometrično večkratnost.

NALOGA 89.
Dana sta vektorja $\vec{u} = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [0, 1, -1]^\mathsf{T}$. Naj bosta A in B matriki

$$A = [\vec{u}\ \vec{v}] \quad \text{in} \quad B = AA^\mathsf{T}.$$

Diagonaliziraj matriko B in izračunaj B^{10}. Pri tem matrike B ni treba eksplicitno izračunati, da jo diagonaliziraš. Pomagaj si z dejstvom, da sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pravokotna.

NALOGA 90.
Zaporedji a_n in b_n sta dani z rekurzivnima zvezama

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n &= 2a_{n-1} - 2b_{n-1}, \end{aligned}$$

in začetnima členoma $a_0 = 3$ ter $b_0 = 3$. Poišči eksplicitni formuli za zaporedji a_n in b_n.

NALOGA 91.
Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y, \\ \dot{y} &= x + 3y, \end{aligned}$$

ter tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $x(0) = 3$ in $y(0) = -2$.

NALOGA 92.
Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti matrike A.
b. Če je mogoče, matriko A diagonaliziraj.

NALOGA 93.
Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazo ničelnega prostora $N(A)$.
b. Poišči bazo stolpčnega prostora $C(A)$.
c. Kateremu lastnemu podprostoru A je enak $N(A)$? Kateri lastni vektorji A so vsebovani v $C(A)$?
d. Poišči najprej lastne vektorje in nato še pripadajoče lastne vrednosti A.

NALOGA 94.
Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo ničelnega prostora $N(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$.
c. Izračunaj A^2. Kaj ti A^2 pove o lastnih vektorjih in pripadajočih lastnih vrednostih matrike A?
d. Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A, in zapiši A kot produkt $A = QDQ^\mathsf{T}$.

NALOGA 95.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti ter pripadajoče lastne vektorje matrike A. Ali lahko matriko A diagonaliziramo?
b. Ali obstaja neničeln vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, da je $A\vec{x}$ vsaj dvakrat daljši vektor, tj. $\|A\vec{x}\| \geq 2\|\vec{x}\|$? Če tak $\vec{x}$ obstaja, ga poišči!

NALOGA 96.
Zaporedji a_n in b_n sta podani rekurzivno z začetnima členoma $a_0 = 4$ in $b_0 = 3$ ter enačbama

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 6b_{n-1}, \\ b_n &= 3a_{n-1} - 5b_{n-1}. \end{aligned}$$

a. Izračunaj člena a_2 in b_2.
b. Poišči eksplicitno formulo za zaporedje a_n.

NALOGA 97.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
b. Poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da bo $A = PDP^{-1}$.
c. Poišči diagonalno matriko D in ortogonalno matriko Q, da bo $A = QDQ^\mathsf{T}$.

NALOGA 98.
Zaporedje a_n je podano rekurzivno z enačbo

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

ter z začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Določi splošni člen zaporedja a_n.

NALOGA 99.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Diagonaliziraj A in izračunaj $p(A)$, kjer je $p(x) = x^{2018} - x^2 + 2x$.

Naloga 100.
Dan je sistem linearnih rekurzivnih enačb

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n &= a_{n-1} - b_{n-1}, \end{aligned}$$

z začetnima vrednostima $a_0 = 1$ in $b_0 = 2$.

a. Izračunaj a_3 in b_3.
b. Zapiši zgornji sistem v obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je $\vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}$.
c. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike iz prejšnje točke.
d. Zapiši formuli za a_n in b_n in izračunaj a_{2018}.

Naloga 101.
Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ali obstaja taka matrika P, da bo $A = PDP^{-1}$?

Rešitve

1. Vektorji in geometrija

Rešitev naloge 1. ⇧

a. Normala na ravnino Σ mora biti pravokotna na premico p (da bo p vzporedna ravnini) in na premico q (ker q leži v ravnini). Ker sta smerna vektorja premic p in q neničelna in linearno neodvisna, lahko normalo ravnine Σ izračunamo kot vektorski produkt smernih vektorjev $\vec{p} = [1, 2, 1]^\mathsf{T}$ in $\vec{q} = [-2, -3, 1]^\mathsf{T}$,

$$\vec{n} = \vec{n}_\Sigma = \vec{p} \times \vec{q} = [5, -3, 1]^\mathsf{T}.$$

Seveda bi lahko za normalo ravnine vzeli tudi katerikoli neničelni večkratnik vektorja $\vec{n}$. Za točko na ravnini lahko vzamemo katerokoli točko na premici q, na primer $Q(0, 1, -1)$. Tako dobimo enačbo za Σ:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_Q \quad \text{oziroma} \quad 5x - 3y + z = -4.$$

b. Ta del lahko rešimo na več načinov. Lahko se iz točke A premaknemo za k-kratnik normale, in poračunamo k tako, da bo dobljena točka ležala na ravnini. Iz

$$\begin{aligned} \vec{r}_{A'} &= \vec{r}_A - k\vec{n} = \\ &= [7, 1, -1]^\mathsf{T} - k[5, -3, 1]^\mathsf{T} = \\ &= [7 - 5k, 1 + 3k, -1 - k]^\mathsf{T} \in \Sigma \end{aligned}$$

in enačbe ravnine Σ dobimo enačbo

$$5(7 - 5k) - 3(1 + 3k) - 1 - k = -4,$$

ki ima rešitev $k = 1$. Torej je $A'(2, 4, -2)$.

Če slučajno že poznamo formulo za pravokotno projekcijo enega vektorja na drugega, imamo še en možen pristop. Poiščemo vektor med katerokoli točko na ravnini, recimo $Q(0, 1, -1)$, in $A(7, 1, -1)$. Označimo ga z $\vec{a}$ in izračunamo

$$\vec{a} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = [7, 0, 0]^\mathsf{T}$$

Projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $\vec{n}$ označimo z $\vec{b}$ in jo izračunamo po formuli

$$\vec{b} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\,\vec{n} = \frac{35}{35}\vec{n} = \vec{n}.$$

Če od krajevnega vektorja $\vec{r}_A$ odštejemo projekcijo $\vec{b}$ pristanemo ravno na ravnini Σ (nariši si sliko). Projekcija točke A na ravnino Σ je torej $A'(2, 4, -2)$.

c. Smerni vektor projicirane premice p' že poznamo, saj je enak $\vec{p}$. Potrebujemo še eno točko na premici p'. Dovolj je projicirati katerokoli točko s premice p na ravnino Σ. Če opazimo, da točka A iz prejšnjega dela naloge leži na premici, lahko uporabimo kar že izračunano točko A'. Tako lahko takoj zapišemo parametrično obliko iskane premice:

$$p' \colon [2, 4, -2]^\mathsf{T} + t[1, 2, 1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 2.

a. Na ravnini z enačbo $z = 0$ ležijo tiste točke, ki imajo tretjo komponento enako 0, torej A in B.
b. Ker A in B že ležita na ravnini, je $A' = A$ in $B' = B$. Izračunajmo enačbo premice p skozi S in C. Smerni vektor bo $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{SC} = [-3, 4, -2]^\mathsf{T}$. Za točko na premici lahko vzamemo C in dobimo enačbo premice

$$p\colon\ [0, 3, 2]^\mathsf{T} + t[-3, 4, -2]^\mathsf{T}.$$

Vsaka točka na premici p je torej oblike $[-3t, 3 + 4t, 2 - 2t]^\mathsf{T}$. Če želimo, da bo tretja komponenta enaka 0, mora biti $t = 1$ in dobimo $C'(-3, 7, 0)$.
c. Ploščino trikotnika $A'B'C'$ najlažje izračunamo po formuli

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\| = \frac{1}{2}\|[0, 3, 0]^\mathsf{T} \times [-3, 7, 0]^\mathsf{T}\| = \\ &= \frac{1}{2}\|[0, 0, 9]^\mathsf{T}\| = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 3.

a. Ravnina Σ bo vsebovala vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, zato lahko za njeno normalo vzamemo njun vektorski produkt:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2, 1, 0]^\mathsf{T} \times [0, 2, 1]^\mathsf{T} = [1, -2, 4]^\mathsf{T}.$$

Za točko na ravnini izberemo $A(0, 0, 0)$ in dobimo enačbo ravnine

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r}_A \quad \text{oziroma} \quad x - 2y + 4z = 0.$$

b. Ker mora biti premica p pravokotna na ravnino, lahko za smerni vektor vzamemo kar normalo ravnine. Enačba premice p je torej

$$p\colon\ [3, 1, 5]^\mathsf{T} + t[1, -2, 4]^\mathsf{T}.$$

c. Točke na premici p imajo koordinate $[3 + t, 1 - 2t, 5 + 4t]^\mathsf{T}$. Ko to vstavimo v enačbo ravnine Σ, dobimo

$$3 + t - 2(1 - 2t) + 4(5 + 4t) = 0,$$

od koder izračunamo $t = -1$. To vstavimo v enačbo premice in dobimo točko $D'(2, 3, 1)$.
d. Prostornino tetraedra dobimo po formuli

$$V = \frac{1}{3}\mathrm{S}_{ABC}h,$$

kjer je S_{ABC} ploščina osnovne ploskve, h pa višina. Prvo izračunamo s pomočjo vektorskega produkta:

$$\mathrm{S}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{n}\| = \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Višina iz D na ploskev ABC je DD', zato je

$$h = \|\overrightarrow{DD'}\| = \|[-1, 2, -4]^\mathsf{T}\| = \sqrt{21}.$$

Torej je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{7}{2}$.

Rešitev naloge 4.

a. Najprej izračunamo kot ϑ med smernim vektorjem premice p, $\vec{p} = [0,1,1]^\mathsf{T}$, in normalo ravnine $\vec{n} = [2,1,2]^\mathsf{T}$. Uporabimo formulo za skalarni produkt:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{p} &= \|\vec{n}\|\|\vec{p}\| \cdot \cos\vartheta, \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 &= \sqrt{2^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{0^2+1^2+1^2} \cdot \cos\vartheta, \\ 3 &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\vartheta, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos\vartheta, \end{aligned}$$

oziroma $\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Od tod dobimo $\vartheta = \pi/4$. Kot φ med premico in ravnino je tako enak

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

b. Točke na premici p imajo obliko

$$[3,0,0]^\mathsf{T} + t[0,1,1]^\mathsf{T} = [3,t,t]^\mathsf{T}.$$

To vstavimo v enačbo ravnine Σ in dobimo enačbo za t,

$$2 \cdot 3 + t + 2t = 9,$$

z rešitvijo $t = 1$. Ko to vstavimo nazaj v enačbo premice, dobimo presečišče $T(3,1,1)$.

c. Pravokotna projekcija p' bo vsebovala točko T. Določiti moramo še smerni vektor, ki ga dobimo kot razliko krajevnih vektorjev dveh točk na p'. Drugo točko dobimo tako, da poljubno od T različno točko s premice p projiciramo na ravnino Σ. Izberimo kar točko $A(3,0,0)$. Ko se premaknemo za večkratnik normale iz točke A, dobimo točko $[3-2k,-k,-2k]^\mathsf{T}$. To vstavimo v enačbo ravnine in dobimo

$$2(3-2k) - k + 2(-2k) = 9.$$

Rešitev je $k = -\frac{1}{3}$ in projekcija A na ravnino je $A'(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Smerni vektor premice p' bo vzporeden vektorju $\overrightarrow{TA'} = [\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]^\mathsf{T}$, recimo $\vec{p}\,' = [2,-2,-1]^\mathsf{T}$. Iskana enačba je torej

$$p'\colon [3,1,1]^\mathsf{T} + t[2,-2,-1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 5.

a. Izračunamo enačbo ravnine Σ, ki jo določajo točke A, B in C in preverimo, če točka D leži na tej ravnini. Normalni vektor ravnine Σ bo vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [3,-3,6]^\mathsf{T} \times [-6,-3,3]^\mathsf{T} = [9,-45,-27]^\mathsf{T}.$$

Izberemo si $\vec{n} = [1,-5,-3]^\mathsf{T}$. Izračunamo še

$$x - 5y - 3z = \vec{n} \cdot \vec{r}_A = [1,-5,-3]^\mathsf{T} \cdot [3,6,3]^\mathsf{T} = -36.$$

Torej je $\Sigma\colon x-5y-3z = -36$. Če vstavimo koordinate točke D, vidimo, da enačba ni izpolnjena. Točka D torej ne leži na Σ, to pa pomeni, da točke A, B, C in D ne ležijo na isti ravnini.

b. Izračunajmo projekcijo A' točke A na ravnino $x+y-z=0$. Iz A se premaknemo za nek večkratnik normale v točko $[3+k, 6+k, 3-k]^\mathsf{T}$. Ta točka mora ležati na ravnini, zato je

$$3 + k + 6 + k - (3-k) = 0,$$

od koder dobimo $k = -2$ in $A'(1,4,5)$. Podobno izračunamo še

$$B'(6,3,9), \quad C'(-1,5,4) \quad \text{in} \quad D'(-2,7,5).$$

c. Točke na daljici $A'D'$ imajo smerni vektor

$$\vec{r}_{A'} + t\overrightarrow{A'D'} = [1,4,5]^\mathsf{T} + t[-3,3,0]^\mathsf{T} = [1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T}$$

za nek t, $0 \le t \le 1$. Točke na daljici $B'C'$ imajo smerni vektor

$$\vec{r}_{B'} + s\overrightarrow{B'C'} = [6,3,9]^\mathsf{T} + s[-7,2,-5]^\mathsf{T} = [6-7s, 3+2s, 9-5s]^\mathsf{T}$$

za nek s, $0 \le s \le 1$. Morebitno presečišče bo ležalo na obeh daljicah, zato bo veljalo

$$[1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T} = [6-7s, 3+2s, 9-5s]^\mathsf{T}$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} 1-3t &= 6-7s, \\ 4+3t &= 3+2s, \\ 5 &= 9-5s. \end{aligned}$$

Dobili smo sistem treh enačb z dvema neznankama. Če je sistem rešljiv in ležita t in s med 0 in 1, potem se daljici sekata. Če je sistem rešljiv, ampak je vsaj eden od parametrov večji od 1 ali manjši od 0, potem se sekata premici, daljici pa ne. Če sistem ne bi imel rešitev, bi v splošnem to pomenilo, da sta premici mimobežni, vendar se to v tem primeru ne sme zgoditi, ker vemo, da ležita v isti ravnini.
Iz tretje enačbe lahko takoj izračunamo $s = \frac{4}{5}$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo še $t = \frac{1}{5}$. Če oboje vstavimo v prvo enačbo, vidimo, da je res izpolnjena.
Presečišče obeh daljic dobimo tako, da enega od parametrov vstavimo v parametrizacijo daljice:

$$[1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T} = \left[1-\frac{3}{5}, 4+\frac{3}{5}, 5\right]^\mathsf{T} = \left[\frac{2}{5}, \frac{23}{5}, 5\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 6.

a. Normalni vektor ravnine bo vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-2,0,-1]^\mathsf{T} \times [0,2,1]^\mathsf{T} = [2,2,-4]^\mathsf{T}.$$

Izberimo $\vec{n} = [1,1,-2]^\mathsf{T}$. Za točko na ravnini uporabimo točko A. Ker je $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 3$, je enačba ravnine

$$\Sigma\colon x + y - 2z = 3.$$

b. Smerni vektor premice, pravokotne na Σ, bo enak $\vec{n}$, zato se enačba te premice glasi

$$p\colon [1,2,3]^\mathsf{T} + t[1,1,-2]^\mathsf{T}.$$

c. Razdalja med točko T in ravnino Σ je razdalja med T in pravokotno projekcijo T' točke T na Σ. Ker je premica p pravokotna na Σ in vsebuje T, bo T' presečišče p in Σ. Točke na p imajo koordinate $[1+t, 2+t, 3-2t]^\mathsf{T}$, in ko to vstavimo v enačbo za Σ, dobimo

$$1 + t + 2 + t - 2(3-2t) = 3.$$

Torej je $t = 1$ in $T'(2,3,1)$. Zdaj lahko izračunamo

$$\|\overrightarrow{TT'}\| = \|[1,1,-2]^\mathsf{T}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Rešitev naloge 7.

a. Najprej izračunamo $\overrightarrow{AB} = [3,3,3]^\mathsf{T}$ in $\overrightarrow{AC} = [6,-3,-3]^\mathsf{T}$, potem pa opazimo, da je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, torej sta vektorja pravokotna in je kot med njima $\frac{\pi}{2} = 90°$.

b. Težišče se izračuna po formuli

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3}[18,3,6]^\mathsf{T} = [6,1,2]^\mathsf{T}.$$

c. Premica, ki bo pravokotna na ravnino trikotnika ABC, bo imela smerni vektor, vzporeden normali, ki jo izračunamo kot

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0,27,-27]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{p} = [0,1,-1]^\mathsf{T}$. Enačba premice se torej glasi

$$p\colon [6,1,2]^\mathsf{T} + t[0,1,-1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 8.

a. Točke na premici p lahko zapišemo kot $[t+1, 3t, 2t+1]^\mathsf{T}$, točke na premici q pa kot $[3s+4, 2s+2, -s]^\mathsf{T}$. Iščemo taki vrednosti za parametra t in s, da bosta zgornji trojici po komponentah enaki. Iz prve komponente lahko izrazimo $t = 3s+3$ in vstavimo v drugo, pa dobimo $3(3s+3) = 2s+2$ oziroma $s = -1$ in zato $t = 0$. Oboje vstavimo še v enačbo, ki jo dobimo z izenačenjem tretjih komponent in vidimo, da je tudi ta izpolnjena. Točka, ki leži v preseku obeh premic, označimo jo s T, ima torej koordinate $T(1,0,1)$.

b. Označimo kot med premicama s φ in smerna vektorja premic z $\vec{p} = [1,3,2]^\mathsf{T}$ in $\vec{q} = [3,2,-1]^\mathsf{T}$. Iz enakosti

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cos\varphi$$

dobimo

$$\begin{aligned} 3+6-2 &= \sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\cos\varphi, \\ 7 &= 14\cos\varphi, \\ \cos\varphi &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Torej je $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

c. Normalni vektor $\vec{n}$ ravnine Σ bo pravokoten na oba smerna vektorja, zato bo vzporeden z vektorskim produktom $\vec{p} \times \vec{q} = [-7,7,-7]^\mathsf{T}$. Izberimo na primer $\vec{n} = [1,-1,1]^\mathsf{T}$, za točko na ravnini pa kar presek premic T. Enačba ravnine se potem glasi

$$x - y + z = 2.$$

Rešitev naloge 9.

a. Za točke, ki ležijo v preseku ravnin, morata biti izpolnjeni obe enačbi. Iz enačbe ravnine Σ izrazimo $x = 2z - y$ in vstavimo v enačbo ravnine Λ, pa dobimo $2z - y + 2y - z = 1$ oziroma $y = 1 - z$. Točke v preseku so torej $[3z-1, 1-z, z]^\mathsf{T}$, kar je ravno parametrizacija premice

$$p\colon [-1,1,0]^\mathsf{T} + z[3,-1,1]^\mathsf{T}.$$

b. Uporabili bomo formulo za zrcaljenje točke A preko ravnine Σ:

$$\vec{r}_{A''} = \vec{r}_A - 2\,\mathrm{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}),$$

kjer je P poljubna točka na ravnini Σ. V našem primeru je najlažje izbrati eno od točk s premice p, na primer $P(-1,1,0)$. Za točko A vzemimo točko s krajevnim vektorjem $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \vec{n}_\Lambda$. Na ta način bomo dosegli, da se bo predstavnik normale

$\vec{n}_\Lambda = \overrightarrow{PA}$ prezrcalil preko ravnine Σ v vektor $\overrightarrow{PA''}$, ki bo torej predstavljal normalo ravnine Λ'. Najprej posebej izračunajmo $A(0,3,-1)$ in

$$\operatorname{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}) = \frac{\vec{n}_\Lambda \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma}\vec{n}_\Sigma = \frac{5}{6}[1,1,-2]^\mathsf{T} = \left[\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{10}{6}\right]^\mathsf{T}.$$

Iz zgornje formule za projekcijo čez ravnino zdaj dobimo

$$\vec{r}_{A''} = [0,3,-1]^\mathsf{T} - \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo še vektor $\overrightarrow{PA''} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]^\mathsf{T}$. Za normalo $\vec{n}_{\Lambda'}$ lahko vzamemo katerikoli vzporedni vektor, na primer $\vec{n}_{\Lambda'} = [-2,1,7]^\mathsf{T}$. Enačba ravnine Λ' se torej glasi

$$\Lambda' \colon \; -2x + y + 7z = 3.$$

Pri tem smo za točko na ravnini seveda uporabili točko P.

Rešitev naloge 10.

a. Točke na premici p imajo parametrizacijo $[t, 2t+1, t+1]^\mathsf{T}$. Če to vstavimo v enačbo za ravnino Σ, dobimo

$$t - 2(2t+1) + 2(t+1) = 1,$$

od koder izračunamo $t = -1$. Točka, ki leži v preseku ravnine Σ in premice p je torej $P(-1,-1,0)$.

b. Normalni vektor ravnine Σ je $\vec{n} = [1,-2,2]$, smerni vektor premice p pa $\vec{p} = [1,2,1]$. Kosinus kota ϑ med normalo in smernim vektorjem dobimo iz formule

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = \|\vec{p}\|\|\vec{n}\| \cos\vartheta.$$

Ker je $\|\vec{p}\| = \sqrt{6}$ in $\|\vec{n}\| = 3$, je

$$1 - 4 + 2 = 3\sqrt{6}\cos\vartheta,$$

od koder izrazimo $\cos\vartheta = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Izračunamo

$$\arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 97.8^\circ.$$

Kot med vektorjema je seveda lahko večji od 90°. Kot med premicama, določenima z vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{n}$, je v tem primeru enak $\vartheta' \approx 180^\circ - 97.8^\circ = 82.2^\circ$. Kot med premico in ravnino je zato enak

$$\varphi = 90^\circ - \vartheta' \approx 90^\circ - 82.2^\circ = 7.8^\circ.$$

Račun bi malce poenostavili, če bi namesto vektorja $\vec{n}$ uporabili vektor $-\vec{n}$.

c. Prezrcaljena premica p' bo vsebovala točko P, v kateri premica p seka ravnino. Določiti moramo le še smerni vektor $\vec{p}\,'$. To naredimo tako, da izberemo poljubno od P različno točko A na premici p in jo prezrcalimo čez ravnino Σ v točko A''. Potem bo $\vec{p}\,'$ vzporeden vektorju $\overrightarrow{PA''}$.
Naj bo $A(0,1,1)$. Uporabimo formulo

$$\vec{r}_{A''} = \vec{r}_A - 2\operatorname{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}).$$

Najprej izračunamo $\overrightarrow{PA} = [1,2,1]^\mathsf{T}$ in

$$\operatorname{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}) = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\vec{n} = -\frac{1}{9}[1,-2,2]^\mathsf{T},$$

nato pa še

$$\vec{r}_{A''} = [0,1,1]^\mathsf{T} + \frac{2}{9}[1,-2,2] = \left[\frac{2}{9},\frac{5}{9},\frac{13}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

Smerni vektor $\vec{p}'$ bo torej vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{PA''} = \vec{r}_{A''} - \vec{r}_P = \left[\frac{11}{9},\frac{14}{9},\frac{13}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

Če izberemo na primer $\vec{p}' = [11,14,13]^\mathsf{T}$, dobimo enačbo

$$p'\colon [-1,-1,0]^\mathsf{T} + t[11,14,13]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 11.

a. Izračunamo vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{DA}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [-2,-1,-2]^\mathsf{T}, \\ \overrightarrow{BC} &= [1,2,-2]^\mathsf{T}, \\ \overrightarrow{CD} &= [2,1,2]^\mathsf{T}, \\ \overrightarrow{DA} &= [-1,-2,2]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Ker je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ in $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, so nasprotne stranice v štirikotniku $ABCD$ vzporedne in je $ABCD$ paralelogram. Ker so dolžine vseh zgornjih vektorjev enake, je $ABCD$ romb. Izračunamo še skalarni produkt

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = [-2,-1,-2]^\mathsf{T}\cdot[1,2,-2]^\mathsf{T} = -2-2+4 = 0.$$

Sledi, da kot pri A meri $\frac{\pi}{2} = 90°$. Ker je $ABCD$ romb, je kot pri C enak kotu pri A, kota pri B in D pa sta komplementarna A, zato so vsi štirje koti pravi. Romb $ABCD$ je torej kvadrat.

b. Preostala oglišča kocke dobimo tako, da začnemo v vsakem od oglišč kvadrata in se v smeri, pravokotni na ravnino kvadrata $ABCD$, pomaknemo za dolžino stranice kvadrata. Pravokotno smer določimo s pomočjo vektorskega produkta. Ker je

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = [-2,-1,-2]^\mathsf{T}\times[1,2,-2]^\mathsf{T} = [6,-6,-3]^\mathsf{T},$$

bo iskani vektor dolžine 3 v tej smeri enak $\vec{v} = [2,-2,-1]^\mathsf{T}$. Seveda se lahko iz vsake od točk A, B C in D premaknemo za $\vec{v}$ ali pa za $-\vec{v}$, zato sta rešitvi dve. Premik za $\vec{v}$ nam da oglišča $A'(4,-1,3)$, $B'(2,-2,1)$, $C'(3,0,-1)$ in $D'(5,1,1)$, premik za $-\vec{v}$ pa oglišča $A''(0,3,5)$, $B''(-2,2,3)$, $C''(-1,4,1)$ in $D''(1,5,3)$. Iskani kocki sta $ABCDA'B'C'D'$ in $ABCDA''B''C''D''$.

c. Ker imamo dve kocki, bosta rešitvi dve, in sicer premici z enačbama $\vec{r}_A + t\overrightarrow{AC'}$ in $\vec{r}_A + t\overrightarrow{AC''}$. Ker je $\overrightarrow{AC'} = [1,-1,-5]^\mathsf{T}$ in $\overrightarrow{AC''} = [-3,3,-3]^\mathsf{T}$, dobimo

$$p'\colon [2,1,4]^\mathsf{T} + t[1,-1,-5]^\mathsf{T}$$

in

$$p''\colon [2,1,4]^\mathsf{T} + t[-3,3,-3]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 12.

a. Najprej preverimo, če je naloga dobro sestavljena in je kot med $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravi. Res, $\overrightarrow{AB} = [1,2,-2]^\mathsf{T}$, $\overrightarrow{BC} = [-2,-1,-2]^\mathsf{T}$ in $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$. Zato bo $ABCD$ pravokotnik, če bo vektor $\overrightarrow{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A$ enak vektorju $\overrightarrow{BC}$. Iz enakosti $\vec{r}_D - \vec{r}_A = \overrightarrow{BC}$ dobimo

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = [2,0,4]^\mathsf{T} + [-2,-1,-2]^\mathsf{T} = [0,-1,2]^\mathsf{T}$$

in iskana točka je torej $D(0,-1,2)$.

b. Smerni vektor premice bo vzporeden z vektorjem

$$\overrightarrow{BD} \;=\; \vec{r}_D - \vec{r}_B \;=\; [-3,-3,0]^\mathsf{T}.$$

Izberimo na primer $\vec{p} = [1,1,0]^\mathsf{T}$. Dobimo enačbo

$$p\colon [3,2,2]^\mathsf{T} + t[1,1,0]^\mathsf{T}.$$

c. Ravnina bo pravokotna na premico p, če bo $\vec{p}$ njena normala. Ker je $\vec{p}\cdot\vec{r}_A = 2$, se enačba ravnine glasi

$$x + y = 2.$$

Rešitev naloge 13.

a. Ker je

$$\frac{\vec{u}\,\vec{a}}{\vec{a}\,\vec{a}} \;=\; \frac{6\cdot 2 + 0\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{2^2+2^2+(-1)^2} \;=\; \frac{9}{9},$$

je projekcija vektorja $\vec{u}$ na vektor $\vec{a}$ enaka

$$\vec{p} \;=\; \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{u} \;=\; \frac{\vec{u}\,\vec{a}}{\vec{a}\,\vec{a}}\vec{a} \;=\; \vec{a} \;=\; [2,2,-1]^\mathsf{T}.$$

b. Na ravnino Σ so pravokotni vsi vektorji oblike $[4t,4t,-2t]^\mathsf{T}$, torej tudi $\vec{p}$.

c. Ker smo že izračunali pravokotno projekcijo $\vec{p}$ vektorja $\vec{u}$ na normalo ravnine, je

$$\vec{q} \;=\; \vec{u} - \vec{p} \;=\; [6,0,3]^\mathsf{T} - [2,2,-1]^\mathsf{T} \;=\; [4,-2,4]^\mathsf{T}.$$

Če tega ne opazimo, moramo izbrati dva linearno neodvisna vektorja v ravnini Σ, na primer $\vec{v}_1 = [1,-1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,1,4]^\mathsf{T}$, in izračunati koeficienta

$$\frac{\vec{u}\,\vec{v}_1}{\vec{v}_1\vec{v}_1} \;=\; \frac{6}{2} = 3 \quad \text{in} \quad \frac{\vec{u}\,\vec{v}_2}{\vec{v}_2\vec{v}_2} \;=\; \frac{18}{18} = 1,$$

potem pa dobimo $\vec{q}$ kot

$$\vec{q} \;=\; 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \;=\; [3,-3,0]^\mathsf{T} + [1,1,4]^\mathsf{T} \;=\; [4,-2,4]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 14.

a. Premica p ima parametrično enačbo

$$p\colon [1,1,3]^\mathsf{T} + t[2,1,3]^\mathsf{T}.$$

Koordinate točk na premici so torej $x = 1+2t$, $y = 1+t$ in $z = 3+3t$. Če iz vsake od teh enačb izrazimo t, dobimo kanonsko obliko enačbe premice p,

$$p\colon \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-3}{3}.$$

b. Najprej poiščimo dva vektorja, ki ležita v ravnini Σ. Eden bo

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \vec{r}_B - \vec{r}_A \;=\; [2,1,4]^\mathsf{T} - [1,1,3]^\mathsf{T} \;=\; [1,0,1]^\mathsf{T}.$$

Drugi je lahko kar smerni vektor $\vec{p}$. Normala ravnine bo pravokotna na oba, zato bo

$$\vec{n} \;=\; \vec{p}\times\overrightarrow{AB} \;=\; [2,1,3]^\mathsf{T}\times[1,0,1]^\mathsf{T} \;=\; [1,1,-1]^\mathsf{T}.$$

Za točko na ravnini izberemo A in izračunamo $\vec{n}\cdot\vec{r}_A = -1$. Enačba ravnine je torej

$$\Sigma\colon x + y - z = -1.$$

Rešitev naloge 15.

a. Ker Σ vsebuje premico p in je vzporedna premici q, bosta oba smerna vektorja ležala v ravnini Σ. To pomeni, da bo normala vzporedna vektorskemu produktu

$$\vec{p} \times \vec{q} \;=\; [0,1,-1]^{\mathsf{T}} \times [2,1,-2]^{\mathsf{T}} \;=\; [-1,-2,-2]^{\mathsf{T}}.$$

Izberimo $\vec{n} = [1,2,2]^{\mathsf{T}}$. Za točko na ravnini vzamemo A in izračunamo $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = 3$. Enačba ravnine je torej

$$\Sigma\colon x + 2y + 2z = 3.$$

b. Najlažje je, če od vektorja $\vec{v}$ odštejemo njegovo projekcijo na normalo ravnine Σ:

$$\begin{aligned} \vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{n}}\vec{v} \;&=\; \vec{v} - \frac{\vec{v}\,\vec{n}}{\vec{n}\,\vec{n}}\vec{n} \;=\; \vec{v} - \frac{9}{9}\vec{n} \;= \\ &=\; [-3,3,3]^{\mathsf{T}} - [1,2,2]^{\mathsf{T}} \;= \\ &=\; [-4,1,1]^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 16.

a. Za točko D bo veljalo, da je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, torej bo $\vec{r}_D - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_B$. Od tu izrazimo

$$\vec{r}_D \;=\; \vec{r}_C - \vec{r}_B + \vec{r}_A \;=\; [-1,4,5]^{\mathsf{T}} - [1,2,3]^{\mathsf{T}} + [1,0,-1]^{\mathsf{T}} \;=\; [-1,2,1]^{\mathsf{T}},$$

torej je $D(-1,2,1)$.

b. Vsi vektorji s krajišči v teh štirih točkah bodo ležali v ravnini Σ, zato bo vektorski produkt poljubnih dveh linearno neodvisnih pravokoten na ravnino. Na primer,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; [0,2,4]^{\mathsf{T}} \times [-2,4,6]^{\mathsf{T}} \;=\; [-4,-8,4]^{\mathsf{T}},$$

zato lahko za normalo ravnine vzamemo $\vec{n} = [1,2,-1]^{\mathsf{T}}$. Ker je $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 2$, je enačba ravnine

$$\Sigma\colon x + 2y - z = 2.$$

c. Premica p ima za smerni vektor kar normalo ravnine, tj. $\vec{p} = \vec{n}$. Poiskati moramo še središče paralelograma S. Ležalo bo v razpolovišču obeh diagonal, zato bo

$$\vec{r}_S \;=\; \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) \;=\; [0,2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Enačba premice p je torej

$$p\colon [0,2,2]^{\mathsf{T}} + t[1,2,-1]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 17.

a. Premici bosta vsebovali točko A, smerna vektorja pa bosta enaka $\vec{u}$ in $\vec{v}$. Torej

$$p\colon [1,3,5]^{\mathsf{T}} + t[1,1,0]^{\mathsf{T}} \quad \text{in} \quad q\colon [1,3,5]^{\mathsf{T}} + s[2,2,1]^{\mathsf{T}}.$$

b. Ker ravnina vsebuje smerna vektorja $\vec{p} = \vec{u}$ in $\vec{q} = \vec{v}$, lahko normalni vektor ravnine Σ dobimo kot vektorski produkt

$$\vec{n} \;=\; \vec{u} \times \vec{v} \;=\; [1,1,0]^{\mathsf{T}} \times [2,2,1]^{\mathsf{T}} \;=\; [1,-1,0]^{\mathsf{T}}.$$

Ker je $A \in \Sigma$ in $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = -2$, ima ravnina enačbo

$$\Sigma\colon x - y = -2.$$

c. Ravnini, ki sta od Σ oddaljeni za $\sqrt{2}$, bosta z ravnino Σ vzporedni, zato bosta imeli isto normalo. Vsebovali bosta točki A' oziroma A'', ki ju dobimo tako, da se iz A premaknemo vzdolž normale za $\pm\sqrt{2}$. Torej

$$\vec{r}_A \pm \sqrt{2}\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \;=\; [1,3,5]^{\mathsf{T}} \pm \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^{\mathsf{T}} \;=\; [1,3,5]^{\mathsf{T}} \pm [1,-1,0]^{\mathsf{T}}.$$

Dobimo točki $A'(2,2,5)$ in $A''(0,4,5)$. Ker je $\vec{r}_{A'} \cdot \vec{n} = 0$ in $\vec{r}_{A''} \cdot \vec{n} = -4$, imata ravnini enačbi

$$\Sigma' \colon x - y = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma'' \colon x - y = -4.$$

Rešitev naloge 18.

a. Najprej izračunajmo vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; [4,1,-1]^{\mathsf{T}} \times [2,1,0]^{\mathsf{T}} \;=\; [1,-2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Potem je

$$S_{ABC} \;=\; \frac{1}{2}\|[1,-2,2]^{\mathsf{T}}\| \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \;=\; \frac{3}{2}.$$

b. Normala ravnine je $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1,-2,2]^{\mathsf{T}}$. Ker je $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = 8$, je njena enačba

$$\Sigma \colon x - 2y + 2z = 8.$$

c. Premica ima za smerni vektor normalo ravnine in vsebuje točko A, zato je njena enačba enaka

$$p \colon [0,-1,3]^{\mathsf{T}} + t[1,-2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 19.

Smerni vektor $\vec{p}$ bo vzporeden vektorskemu produktu

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; [1,2,3]^{\mathsf{T}} \times [-1,1,3]^{\mathsf{T}} \;=\; [3,-6,3]^{\mathsf{T}}.$$

Izberimo $\vec{p} = [1,-2,1]^{\mathsf{T}}$. Koordinate težišča T dobimo iz

$$\vec{r}_T \;=\; \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) \;=\; \frac{1}{3}[6,6,6]^{\mathsf{T}} \;=\; [2,2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Torej je težišče v točki $T(2,2,2)$ in enačba premice p je

$$p \colon [2,2,2]^{\mathsf{T}} + t[1,-2,1]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 20.

a. Točke na premici p ležijo na ravninah Σ_1 in Σ_2, zato ustrezajo obema enačbama. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ 3x + y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe najlažje izrazimo $y = 2x - 2z - 3$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $2 = 3x + 2x - 2z + 3 + 2z = 5x - 3$, od koder takoj sledi $x = 1$ in zato $y = -2z - 1$. Točke na premici p so torej oblike $[1, -2z-1, z]^{\mathsf{T}}$, parametrična enačba premice pa je zato enaka

$$p \colon [1,-1,0]^{\mathsf{T}} + z[0,-2,1]^{\mathsf{T}}.$$

Seveda bi lahko nalogo rešili tudi tako, da bi za smerni vektor premice p vzeli vektorski produkt normal $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$, za točko na premici pa poiskali eno točko, ki zadošča obema enačbama.

b. Videli smo že, da so točke na premici p oblike $[1, -2z-1, z]^{\mathsf{T}}$. To vstavimo v enačbo tretje ravnine in dobimo

$$-4 \;=\; 1 - (-2z - 1) - 5z \;=\; 1 + 2z + 1 - 5z \;=\; 2 - 3z,$$

od koder takoj sledi $z = 2$. Premica p in ravnina Σ_3 se torej sekata v točki $P(1,-5,2)$.

c. Najprej iščemo kot ϑ med smernim vektorjem $\vec{p} = [0, -2, 1]^\mathsf{T}$ premice p in normalo $\vec{n}_3 = [-1, 1, 5]^\mathsf{T}$ ravnine Σ_3. Uporabili bomo formulo

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{p} = \|\vec{n}_3\| \|\vec{p}\| \cos\vartheta,$$

kjer smo s ϑ označili iskani kot. Dobimo

$$\begin{aligned}
0 \cdot -1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5 &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 5^2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} \cos\vartheta, \\
3 &= \sqrt{27}\sqrt{5} \cos\vartheta, \\
3 &= 3\sqrt{3}\sqrt{5} \cos\vartheta, \\
\cos\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{15}} \\
\vartheta &\approx \arccos(0.258) \\
\vartheta &\approx 75^\circ.
\end{aligned}$$

Kot med premico in ravnino je torej enak

$$\varphi \;=\; 90^\circ - \vartheta \;\approx\; 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

2. Sistemi linearnih enačb

Rešitev naloge 21.

Najprej od druge enačbe odštejemo prvo in od tretje dvakratnik prve:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & 2z & = & 3, \\
 & & y & - & 3z & = & 1, \\
 & - & y & + & (a-5)z & = & -1.
\end{array}$$

Nazadnje pa še novi tretji enačbi prištejemo novo drugo enačbo:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & 2z & = & 3, \\
 & & y & - & 3z & = & 1, \\
 & & & & (a-8)z & = & 0.
\end{array}$$

Če je torej $a \neq 8$, potem iz tretje enačbe dobimo $z = 0$, iz druge $y = 1$ in nazadnje še iz prve $x = 1$. V teh primerih je sistem enolično rešljiv in rešitev je $[1, 1, 0]^\mathsf{T}$.
Če je $a = 8$, je zadnja enačba trivialna in dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki ima enoparametrično družino rešitev. Če pišemo $z = t$, dobimo iz druge enačbe $y = 1+3t$ in iz prve $x = 1 - 8t$. V tem primeru so rešitve sistema $[1, 1, 0]^\mathsf{T} + t[-8, 3, 1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 22.

Iz napisanega lahko zapišemo sistem štirih enačb s štirimi neznankami

$$\begin{aligned}
x + y + z + w &= 4, \\
x - (y + z + w) &= 3, \\
(x + y) - (z + w) &= 2, \\
(x + y + z) - w &= 1.
\end{aligned}$$

Ko odpravimo oklepaje, dobimo

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 4, \\ x-y-z-w &= 3, \\ x+y-z-w &= 2, \\ x+y+z-w &= 1. \end{aligned}$$

Preostalim trem enačbam odšejemo prvo, da se znebimo spremenljivke x, nato pa jih še pomnožimo z -1:

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 4, \\ 2y+2z+2w &= 1, \\ 2z+2w &= 2, \\ 2w &= 3. \end{aligned}$$

Od tu pa že lahko izračunamo odgovor. Iz zadnje enačbe dobimo $w = \frac{3}{2}$, iz tretje $z = -\frac{1}{2}$, nato iz druge $y = -\frac{1}{2}$ in nazadnje iz prve $x = \frac{7}{2}$.

Rešitev naloge 23.

Vektor $\vec{v}$ bo pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če bo veljalo $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0$. Dobimo torej sistem enačb

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \vec{c} \cdot \vec{v} &= 1, \\ \vec{d} \cdot \vec{v} &= 1, \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & & & = & 0, \\ & & y & + & 3z & + & w & = & 0, \\ 4x & + & 2y & + & z & - & w & = & 1, \\ -2x & - & y & + & 2z & + & w & = & 1. \end{array}$$

Če prvo enačbo delimo z 2, tretji odštejemo dvakratnik prve in četrti prištejemo prvo, dobimo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 0, \\ & & y & + & 3z & + & w & = & 0, \\ & - & 2y & - & 3z & - & w & = & 1, \\ & & y & + & 4z & + & w & = & 1. \end{array}$$

Na naslednjem koraku četrti enačbi odštejemo drugo in tretji prištejemo dvakratnik druge, pa imamo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & & & = & 0, \\ & & y & + & 3z & + & w & = & 0, \\ & & & & 3z & + & w & = & 1, \\ & & & & z & & & = & 1. \end{array}$$

Četrta enačba pravi, da je $z = 1$. Če to vstavimo v tretjo, dobimo $w = -2$. Nato iz druge enačbe sledi, da je $y = -1$, in nazadnje iz prve enačbe izračunamo $x = 0$.
Hitro se lahko prepričamo, da je vektor $[0, -1, 1, -2]^{\mathsf{T}}$ res rešitev naloge.

Rešitev naloge 24.

Če od prve enačbe odštejemo zadnjo, drugi enačbi prištejemo (novo) prvo, tretji pa odštejemo dvakratnik (nove) prve, dobimo

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ (a-1)(a+1)y &= a+1, \\ z &= 2. \end{aligned}$$

Vidimo, da bo število rešitev odvisno od druge enačbe.

a. Če je $a = -1$, je druga enačba trivialna. Dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki bo imel enoparametrično družino rešitev. Če vzamemo x za parameter, lahko izrazimo $y = 1 - x$ iz prve enačbe in dobimo rešitve
$$[x, 1-x, 2]^{\mathsf{T}}.$$
b. Če je $a = 1$, je druga enačba protislovna, ker dobimo na levi strani 0, na desni pa ne. V tem primeru sistem nima rešitev.
c. Če je $a \notin \{1, -1\}$, potem lahko drugo enačbo delimo z $a + 1$ in nato izrazimo $y = \frac{1}{a-1}$. Iz prve enačbe potem dobimo še $x = 1 - \frac{1}{a-1}$, iz zadnje pa $z = 2$, zato ima v tem primeru sistem natanko eno rešitev.

Rešitev naloge 25.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a-2 \\ 0 & a-2 & 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = [1, -1, 0]^{\mathsf{T}}$.
b. Če naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema $[A|b]$ tako, da drugi vrstici prištejemo prvo, tretji vrstici prištejemo drugo in od dvakratnika tretje vrstice odštejemo a-kratnik druge, dobimo
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a-a^2 & 0 \end{array}\right].$$
Če je $4a - a^2 = 0$, potem dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki ni enolično rešljiv. Za $a = 0$ imamo parameter $z = t$ in iz druge enačbe dobimo $y = t$, potem pa iz prve še $x = 1 - t$. Za $a = 4$ in parameter $z = t$ dobimo iz druge enačbe $y = -t$ in iz prve $x = 1 + t$.
c. Če je $a \notin \{0, 4\}$, potem iz tretje enačbe sledi $z = 0$, iz druge še $y = 0$ in iz prve $x = 1$, torej je rešitev sistema $[1, 0, 0]^{\mathsf{T}}$.

Rešitev naloge 26.

Naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Če pišemo $w = t$, izrazimo iz tretje enačbe $z = t$, iz druge $y = 1 - 3t$ in iz prve $x = 1 + t$. Dobimo enoparametrično družino rešitev

$$[1, 1, 0, 0]^\mathsf{T} + t[1, -3, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 27.

a. Na razširjeni matriki $[A|\vec{b}_1\,\vec{b}_2]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Vidimo, da je sistem $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ protisloven, ker je zadnja enačba v poenostavljenem sistemu $0 = 1$. Za sistem $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ dobimo enačbe

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 - x_4 &= 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Hitro lahko najdemo eno rešitev, na primer $[1, 0, 1, 0, 0]^\mathsf{T}$.

b. Sistem $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ nima nobene rešitve. Rešitve sistema $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ so oblike

$$[1 - x_4 - x_5,\ x_4,\ 1 - x_4 - x_5,\ x_4,\ x_5]^\mathsf{T},$$

kjer sta $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ parametra.

Rešitev naloge 28.

Na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej $[x, y, z, w]^\mathsf{T} = [0, 1, 2, 0]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 29.

Na razširjeni matriki sistema $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Vidimo, da ima matrika A rang 3, zato bo družina rešitev enoparametrična. Če vzamemo x_4 za parameter, dobimo $x_3 = 4 + x_4$, $x_2 = 0$ in $x_1 = -x_4$. Rešitve so torej oblike

$$[-x_4,\ 0,\ 4 + x_4,\ x_4]^\mathsf{T}.$$

Rešitev, ki ima vsoto komponent enako 0, zadošča pogoju

$$-x_4 + 0 + 4 + x_4 + x_4 = 0,$$

torej ustreza izbiri parametra $x_4 = -4$. Iskana rešitev je $\vec{x} = [4, 0, 0, -4]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 30.

Začnimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$\begin{aligned}
[A|\vec{b}] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \end{array}\right] \sim \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Če je $u = 0$ in $v = 1$, potem ima sistem enoparametrično družino rešitev

$$[1,\ x_2,\ -x_2]^\mathsf{T}.$$

Če je $u = 0$ in $v \neq 1$, potem sistem nima rešitev. Če je $u \neq 1$, potem lahko nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-v}{u} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1-v}{u} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-v}{u} \end{array}\right].$$

Za $u \neq 0$ ima torej sistem eno samo rešitev, in sicer

$$\left[1,\ -\frac{1-v}{u},\ \frac{1-v}{u}\right]^\mathsf{T}.$$

3. Matrike in sistemi

Rešitev naloge 31.

Enačbo najprej preuredimo:

$$\begin{aligned}
2AX + BX &= AX + A, \\
AX + BX &= A, \\
(A + B)X &= A.
\end{aligned}$$

V tej obliki enačbo najlažje rešimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\, A+B \,\middle|\, A \,\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika $A+B$ obrnljiva, bi lahko nalogo rešili tudi tako, da bi izračunali inverz in potem dobili X kot produkt

$$X = (A+B)^{-1}A,$$

ampak ker bi tudi inverz računali s pomočjo Gaussove eliminacije, je prva pot do rešitve lažja, saj se izognemo množenju matrik.

Rešitev naloge 32.

Enačbo preuredimo:

$$\begin{aligned} AX - X &= I - B, \\ (A-I)X &= I - B. \end{aligned}$$

Zdaj jo najlažje rešimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\, A-I \,\middle|\, I-B \,\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 33.

Najprej enačbo preoblikujemo:

$$\begin{aligned} AX^{\mathsf{T}} - X^{\mathsf{T}} &= I - B^{\mathsf{T}}, \\ (A-I)X^{\mathsf{T}} &= I - B^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

Od tu znamo izračunati X^T s pomočjo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{c|c} A-I & I-B^\mathsf{T}\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -15 & -5 \end{array}\right].$$

Dobimo torej

$$X^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -9 & -15 & -5 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -9 \\ -3 & 7 & -15 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Seveda pa bi lahko že na začetku transponirali celo enačbo. Dobili bi

$$\begin{aligned} XA^\mathsf{T} &= X + I - B, \\ XA^\mathsf{T} - X &= I - B, \\ X(A^\mathsf{T} - I) &= I - B, \\ X &= (I-B)(A^\mathsf{T} - I)^{-1}. \end{aligned}$$

Ker je matrika $A^\mathsf{T} - I$ obrnljiva, bi tudi tako prišli do rešitve.

Rešitev naloge 34.

Najprej izračunamo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

To lahko naredimo z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki $[A|I]$, lahko pa uporabimo formulo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Zdaj zapišemo in preoblikujemo dano enačbo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 & x_1 \\ 3x_3 - x_4 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 & -x_4 \\ x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 & x_1 - x_4 \\ x_1 + 6x_3 - x_4 & x_2 + x_3 + 3x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dve matriki sta enaki takrat, ko sta enaki po komponentah, torej dobimo sistem štirih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 6, \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 6, \\ x_1 & & & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -6. \end{array}$$

Sistem prepišemo v razširjeno matriko in naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Od tu preberemo rešitev $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$ in $x_4 = -3$ oziroma

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 35.

Najprej razmislimo, da mora biti X matrika velikosti 2×2 in zapišemo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Nato zapišemo sistem in matrike pomnožimo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_2 & x_1 \\ x_3 + 2x_4 & 2x_4 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & 2x_2 + 4x_4 & x_1 + 2x_3 \\ 2x_3 + 4x_4 & 4x_4 & 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 & 2x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprva kaže, da bomo z izenačenjem istoležnih koeficientov matrik na levi in desni dobili sistem z 9 enačbami in 4 neznankami. Vendar z uporabo metode ostrega pogleda zaključimo, da so za vsako vrstico enačbe, ki ustrezajo prvemu stolpcu vsota tistih iz drugega in tretjega stolpca, zato so odveč. Preostalih 6 enačb se glasi:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_4 &= 6, \\ x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_4 &= 4, \\ 2x_3 &= 2, \\ 2x_2 &= 2, \\ x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Iz zadnjih štirih enačb hitro dobimo rešitev $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ in nato preverimo, da sta pri teh vrednostih izpolnjeni tudi prvi dve enačbi. Rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 36.

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Iščemo 2×3 matriko X, ki reši sistem $XA = B$. Ker smo navajeni, da je matrika neznank pri reševanju sistemov na desni strani znane matrike, enakost transponirajmo. Dobimo

$$A^\mathsf{T} X^\mathsf{T} = B^\mathsf{T}.$$

Zapišemo razširjeno matriko tega sistema in naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A = \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Od tu preberemo

$$X^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -1 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

in nazadnje

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zgornji sistem je enolično rešljiv, zato je to edina matrika X, ki ustreza pogojem.

Rešitev naloge 37.

a. Vidimo, da sta obe kvadratni matriki obrnljivi, zato sklepamo, da bo ena od njiju A, druga pa B, medtem ko bo C preostala 2×3 matrika. Torej

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrično enačbo $AXB = C$ najprej pomnožimo z leve z A^{-1} in dobimo

$$XB = A^{-1}C,$$

nato pa z desne z B^{-1}, da izrazimo X:

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Ko torej ugotovimo, kako so matrike poimenovane, jih moramo samo še zmnožiti, da dobimo rešitev X. Matriki lahko zmnožimo, če se število stolpcev levega faktorja ujema s številom vrstic desnega faktorja, tj. množimo lahko $m \times n$ matriko z $n \times l$ matriko. To pomeni, da mora biti na levi strani matrike C matrika dimenzije $m\times 2$, na desni pa matrika dimenzije $2 \times l$ za poljubna m in l. Z drugimi besedami,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Za nadaljevanje najprej izračunamo oba inverza:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nazadnje samo še pomnožimo

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 38. ⇧

a. Matriki L in U sta pravilne oblike (L spodnje trikotna z enicami na diagonali in U zgornje trikotna) in velikosti, zato moramo le še preveriti, da res dobimo A, ko izračunamo produkt LU.

b. Namesto sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ zapišemo sistem $LU\vec{x} = \vec{b}$, označimo $U\vec{x} = \vec{y}$ in najprej rešimo sistem $L\vec{y} = \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Iz prve vrstice takoj dobimo $y_1 = 1$, iz druge pa $y_2 = 3$. Oboje vstavimo v tretjo enačbo, $2y_1 - 2y_2 + y_3 = 2$, in izrazimo še $y_3 = 6$. Tako je $\vec{y} = [1, 3, 6]^\mathsf{T}$. Zdaj pa rešimo še drugi del problema, $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje vrstice dobimo $x_3 = -3$, to vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $x_2 = 3$, in nazadnje oboje vstavimo v prvo enačbo, da dobimo še $x_1 = -2$. Rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ je torej $\vec{x} = [-2, 3, -3]^\mathsf{T}$.

c. Inverz 3×3 matrike s pomočjo LU razcepa dobimo tako, da trikrat uporabimo zgornji postopek. Označimo neznani inverz z X in stolpce matrike X z $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in $\vec{x}_3$. Poleg tega naj $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ označujejo stolpce identične matrike. Z zgornjim postopkom rešimo sisteme

$$A\vec{x}_i = \vec{e}_i.$$

Na prvem koraku rešimo sisteme $L\vec{y}_i = \vec{e}_i$ in dobimo vektorje

$$\vec{y}_1 = [1, 0, -2]^\mathsf{T}, \quad \vec{y}_2 = [0, 1, 2]^\mathsf{T}, \quad \vec{y}_3 = [0, 0, 1]^\mathsf{T},$$

na drugem koraku pa rešimo sisteme $U\vec{x}_i = \vec{y}_i$ in dobimo rešitve

$$\vec{x}_1 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{x}_2 = [-1, 1, -1]^\mathsf{T}, \quad \vec{x}_3 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

Inverz je torej

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 39.

a. Brez težav zmnožimo

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. Uporabimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki C, da dobimo zgornjo trikotno matriko U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo tretji vrstici odšteli štirikratnik prve in nato še drugo, zato bo v matriki

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$l_{31} = 4$ in $l_{32} = 1$, medtem ko bo $l_{21} = 0$, ker drugi vrstici nismo nič odšteli. Torej je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

c. Sistem $C\vec{x} = \vec{b}$ najprej prepišemo v obliko $LU\vec{x} = \vec{b}$, nato pa iz tega naredimo dva sistema: $L\vec{y} = \vec{b}$ in $U\vec{x} = \vec{y}$. Prvi sistem je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Iz prve enačbe dobimo $y_1 = 2$ in iz druge $y_2 = 6$. Iz tretje enačbe nato izrazimo $y_3 = 2 - 4y_1 - y_2 = -12$, zato je $\vec{y} = [2, 6, -12]^\mathsf{T}$. Drugi sistem je torej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje enačbe dobimo $x_3 = 2$, iz druge nato $x_2 = 6 - 3x_3 = 0$ in iz prve $x_1 = 2$. Rešitev je torej $\vec{x} = [2, 0, 2]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 40.

Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vidimo, da so rešitve oblike $[z, 1 - z, z]^\mathsf{T}$. Razlike $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ so zato oblike

$$\vec{r} = [z_1 - z_2,\ 1 - z_1 - (1 - z_2),\ z_1 - z_2]^\mathsf{T} = [z_1 - z_2,\ z_2 - z_1,\ z_1 - z_2]^\mathsf{T} = [t, -t, t]^\mathsf{T},$$

torej gre za premico. Množica vektorjev, ki so pravokotni na premico $[t, -t, t]^\mathsf{T}$ je seveda ravnina z normalo $\vec{n} = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$, torej ravnina

$$x - y + z = 0.$$

Do rešitve lahko pridemo še na en način. Ker je $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, je

$$A\vec{r} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = 0,$$

torej je množica vseh razlik kar ničelni prostor $N(A)$, množica vektorjev, ki so pravokotni nanje, pa $N(A)^\perp = C(A^\mathsf{T})$. Ker je

$$A^\mathsf{T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

je torej iskana množica enaka

$$\mathcal{L}(\{[1, 0, -1]^\mathsf{T}, [0, 1, 1]^\mathsf{T}\}).$$

Hitro se lahko prepričamo, da gre natanko za ravnino, ki smo jo dobili zgoraj, če izračunamo vektorski produkt obeh vektorjev. Dobimo namreč ravno normalo $\vec{n}$.

Rešitev naloge 41.

Enačbo transponiramo in dobimo $(XB)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}$ oziroma

$$B^\mathsf{T} X^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}.$$

Zdaj pa naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[B^{\mathsf{T}}|A^{\mathsf{T}}]$:

$$\begin{aligned}
[B^{\mathsf{T}}|A^{\mathsf{T}}] &= \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 9 & -5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Od tu preberemo

$$X^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 42.

Ker je matrika B očitno obrnljiva, lahko enačbo zapišemo kot sistem

$$AX = (A+B)B^{-1}$$

in jo rešimo z uporabo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki $[A|(A+B)B^{-1}]$. Najprej izračunamo, da je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad (A+B)B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

nato pa

$$[A|(A+B)B^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Od tu preberemo rešitev

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izračunali tudi A^{-1} in rešitev dobili kot

$$X = A^{-1}(A+B)B^{-1},$$

ampak za izračun inverza matrike A bi prav tako potrebovali Gaussovo eliminacijo na matriki s tremi vrsticami in šestimi stolpci, poleg tega pa bi morali izvesti še eno dodatno množenje dveh 3×3 matrik.

4. Determinante

Rešitev naloge 43.

Ker je matrika X simetrična, bo oblike

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$

za neke neznane x, y in z. S tem smo izpolnili prvi pogoj. Ker mora X komutirati z matriko A, mora veljati

$$\begin{aligned} AX &= XA, \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 2x+y & 2y+z \\ -x & -y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x-y & x \\ 2y-z & y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dve matriki sta enaki, kadar so enake vse komponente, zato mora veljati

$$\begin{aligned} 2x+y &= 2x-y, \\ 2y+z &= x, \\ -x &= 2y-z, \\ -y &= y. \end{aligned}$$

Iz zadnje enakosti takoj dobimo $y = 0$ in s tem je izpolnjena tudi prva enakost. Iz druge potem dobimo še $x = z$ in s tem velja še tretja enakost. Torej mora biti X oblike

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

Nazadnje upoštevamo še tretji pogoj, $\det X = 4$. Ker je $\det X = x^2$, sta rešitvi $x = 2$ in $x = -2$. Edini matriki, ki ustrezata vsem trem pogojem sta torej $2I$ in $-2I$.

Rešitev naloge 44.

a. Prvo determinanto lahko izračunamo direktno. Za izračun druge in tretje naredimo najprej razvoj po prvi vrstici, nato pa drugo od obeh dobljenih determinant razvijemo še po prvem stolpcu.

$$\begin{aligned}
\det(A_2) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25-4 = 21. \\
\det(A_3) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_2) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \\
&= 5\cdot 21 - 2\cdot 10 = 85. \\
\det(A_4) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_3) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \\
&= 5\det(A_3) - 4\det(A_2) = 5\cdot 85 - 4\cdot 21 = 341.
\end{aligned}$$

b. Podobno kot pri izračunu $\det(A_4)$ opazimo, da velja

$$\det(A_n) = 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}).$$

c. Ker bomo v indukcijski predpostavki uporabili formulo

$$\det(A_n) = 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}),$$

ki $\det(A_n)$ izraža z dvema prejšnjima, moramo za bazo indukcije preveriti dve zaporedni vrednosti. Formula

$$\det(A_n) = \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$$

očitno velja za $n=2$ in $n=3$.
Za dokaz indukcijskega koraka uporabimo rekurzivno zvezo, ki smo jo izpeljali pri prejšnji točki, in dobimo

$$\begin{aligned}
\det(A_n) &= 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}) = \\
&= 5\cdot\frac{1}{3}(4^n-1) - 4\cdot\frac{1}{3}(4^{n-1}-1) = \\
&= \frac{1}{3}(5\cdot 4^n - 5 - 4^n + 4) = \\
&= \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right),
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uporabili indukcijsko predpostavko.

Rešitev naloge 45.

Najprej izračunajmo $\det A$, $\det B$ in $\det(B-A)$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-5) = 10. \\
\det B &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2+1) = -5. \\
\det(B-A) &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -4\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 4\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3-8) = -20.
\end{aligned}$$

Od tu brez težav dobimo še

$$\begin{aligned}
\det A^{\mathsf{T}} &= \det A = 10, \\
\det(AB) &= \det A \cdot \det B = 10 \cdot (-5) = -50, \\
\det(AB)^{-1} &= (\det(AB))^{-1} = -\frac{1}{50}, \\
\det AB^{-1} &= \det A \cdot (\det B)^{-1} = \frac{10}{-5} = -2, \\
\det(B-A)^{-1} &= (\det(B-A))^{-1} = -\frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 46.

a. Matrika G mora po stolpcih vsebovati vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, matrika H pa vektorje $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ in $\vec{c}-\vec{a}$. Torej je

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad H=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Ker je $XG=H$, je tudi $\det X \det G = \det H$. Ampak stolpci matrike H so očitno linearno odvisni, zato je $\det H = 0$. Ker je $\det G = -4 \neq 0$, mora biti $\det X = 0$.

c. Ker je $\det G \neq 0$, je matrika G obrnljiva in lahko izrazimo $X = HG^{-1}$. Inverz matrike G izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacije in dobimo

$$G^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Ta inverz pomnožimo z leve s H in dobimo

$$X=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 47.

Pišimo $\vec{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^\mathsf{T}$ in $\vec{y}=[y_1,y_2,\ldots,y_n]^\mathsf{T}$. Tedaj je

$$\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}=\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \ldots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 & \ldots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \ldots & x_ny_n \end{vmatrix}$$

in

$$I+\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & x_2y_3 & \ldots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \ldots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \ldots & 1+x_ny_n \end{vmatrix},$$

poleg tega pa je

$$\vec{y}^\mathsf{T}\vec{x}=0,$$

ker sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna. Opazimo, da je

$$\begin{aligned}(I+\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T})(I-\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}) &= I-\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}+\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}-(\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T})(\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}) = \\ &= I-(\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T})(\vec{x}\,\vec{y}^\mathsf{T}) = \\ &= I-\vec{x}(\vec{y}^\mathsf{T}\vec{x})\vec{y}^\mathsf{T} = \\ &= I.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$\det(I+\vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}})\det(I-\vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}}) \;=\; \det((I+\vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}})(I-\vec{x}\,\vec{y}^{\mathsf{T}})) \;=\; \det I \;=\; 1,$$

zato moramo zares izračunati le eno od obeh determinant. Izračunajmo prvo. Pri tem si bomo pomagali z matriko

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\vec{y}^{\mathsf{T}} \\ \vec{x} & I \end{bmatrix}.$$

Poskrbimo za ničle pod diagonalo v prvem stolpcu, in sicer tako, da prvemu stolpcu po vrsti odštevamo x_1-kratnik drugega, x_2-kratnik tretjega in tako dalje:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1+x_1y_1+\ldots+x_ny_n & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ker sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna, je $x_1y_1+\ldots x_ny_n=0$, in ker je popravljena matrika zgornje trikotna z enicami po diagonali, je $\det M = 1$. Po drugi strani pa lahko matriko M popravimo tako, da odštevamo po vrsticah in dobimo

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n \\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n \\ 0 & 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ 0 & x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Tokrat je dobljena matrika bločno zgornje trikotna in spodnji blok je ravno enak $I+xy^{\mathsf{T}}$, zato je $\det M = \det\,(I+xy^{\mathsf{T}})$. Pokazali smo, da je $\det\,(I+xy^{\mathsf{T}})=1$, potem pa je tudi

$$\det\,(I-xy^{\mathsf{T}}) = \frac{1}{\det\,(I+xy^{\mathsf{T}})} = 1.$$

Rešitev naloge 48.

Najprej izračunamo

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6$$

in

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-3+4) = 2.$$

Od tu dobimo še

$$\det(A^{\mathsf{T}}A) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det A = (\det A)^2 = 36$$

in

$$\det(A^{\mathsf{T}}(A-I)) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det(A-I) = \det A \cdot \det(A-I) = -6 \cdot 2 = -12.$$

Rešitev naloge 49.

Ker je

$$\det(B^{\mathsf{T}}(B+2I)) = \det(B^{\mathsf{T}})\det(B+2I) = \det B \det(B+2I)$$

in $\det(B+2I)^{-1} = (\det(B+2I))^{-1}$, zadošča izračunati $\det B$ in $\det(B+2I)$. Hitro vidimo, da je

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4(9-15) = -24.$$

in

$$\det(B+2I) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot 10 = 100.$$

Torej je

$$\det(B^{\mathsf{T}}(B+2I)) = -24 \cdot 100 = -2400$$

in $\det(B+2I)^{-1} = \frac{1}{100}$.

Rešitev naloge 50.

Ker je $\det(AX) = \det A \det X = \det B$, bo

$$\det X = \frac{\det B}{\det A}$$

in se lahko izognemo reševanju sistema. Ker je matrika A zgornje trikotna, je njena determinanta enaka produktu diagonalnih členov, torej $\det A = 6$. Izračunamo samo še

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3,
\end{aligned}$$

pa dobimo

$$\det X = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Rešitev naloge 51.

Najprej izračunamo

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ t-3 & 3 & t \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 3-(t-1)(t-3) & 3 \\ 0 & -t & -3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 3-(t-1)(t-3) & 3 \\ -t & -3 \end{vmatrix} = \\
&= -9 + 3(t-1)(t-3) + 3t = \\
&= -9 + 3t^2 - 12t + 9 + 3t = \\
&= 3t^2 - 9t = 3t(t-3).
\end{aligned}$$

Determinanta bo torej enaka 0 za $t = 0$ in $t = 3$.

Rešitev naloge 52.

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{bmatrix} 3 & t & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t-21 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & t-21 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1-6t & 2-2t \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} t-21 & -4 \\ -1-6t & 2-2t \end{bmatrix} = \\
&= -(t-21)(2-2t) + 4(1+6t) = \\
&= -(2t - 2t^2 - 42 + 42t) + 4 + 24t = \\
&= 2t^2 - 20t + 46.
\end{aligned}$$

Ker mora biti $\det A = 4$, dobimo

$$\begin{aligned} 2t^2 - 20t + 46 &= 4, \\ 2t^2 - 20t + 42 &= 0, \\ t^2 - 10t + 21 &= 0, \\ (t-3)(t-7) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi sta torej $t = 3$ in $t = 7$.

5. Vektorski prostori in linearne preslikave

Rešitev naloge 53.

a. Matriko A, ki izraža preslikavo ϕ v standardni bazi, dobimo tako, da izračunamo slike standardnih baznih vektorjev $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ ter rezultate zložimo v stolpce matrike. Lažje bo, če prej zapišemo sliko splošnega vektorja $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x_1 + x_3) = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sliko $\phi(\vec{e}_1)$ dobimo tako, da v zgoraj izpeljano formulo vstavimo $x_1 = 1$ in $x_2 = x_3 = 0$. Podobno postopamo za $\phi(\vec{e}_2)$ in $\phi(\vec{e}_3)$ in dobimo

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\vec{e}_1) & \phi(\vec{e}_2) & \phi(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Jedro preslikave ϕ oziroma njene matrike A dobimo tako, da na A izvedemo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V jedru so vektorji $\vec{x}$, ki rešijo sistem $A\vec{x} = \vec{0}$, torej taki, za katere velja $x_1 + x_3 = 0$. Ker imamo med tremi spremenljivkami samo eno vez, dobimo dvoparametrično družino rešitev tega sistema. Baza za jedro sta tako vektorja $[1, 0, -1]^\mathsf{T}$ in $[0, 1, 0]^\mathsf{T}$.

Sliko preslikave ϕ oziroma njene matrike A dobimo tako, da na A izvedemo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stolpci tvorijo bazo slike, torej je $\mathrm{im}(\phi)$ napeta na vektor $[1,0,1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 54.

Preden začnemo odgovarjati na vprašanja, poenostavimo preslikavo ϕ:

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{x},$$

ker je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za poljuben $\vec{a}$.

a. Preverimo:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y} = \\ &= \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\vec{x}) &= \vec{a} \times (\alpha\vec{x}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{x}) = \\ &= \alpha\phi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Enakosti sledijo iz lastnosti vektorskega produkta.

b. Poiščimo najprej predpis za $\phi(\vec{x})$ za splošen vektor $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \vec{a} \times \vec{x} = [1,2,0]^\mathsf{T} \times [x_1,x_2,x_3]^\mathsf{T} = \\ &= [2x_3, -x_3, x_2 - 2x_1]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Slike baznih vektorjev so torej

$$\phi(\vec{e}_1) = [0,0,-2]^\mathsf{T}, \quad \phi(\vec{e}_2) = [0,0,1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \phi(\vec{e}_3) = [2,-1,0]^\mathsf{T},$$

matrika A pa je enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Jedro dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v jedru vektorji $[x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$, za katere je $x_3 = 0$ in $x_2 = 2x_1$, torej je baza jedra $\{[1,2,0]^\mathsf{T}\} = \{\vec{a}\}$. Za sliko naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza $\mathrm{im}\,\phi$ je torej $\{e_3, 2e_1 - e_2\}$.

Rešitev naloge 55.

a. Ker je jedro linearne preslikave vedno vektorski podprostor domene in lahko zapišemo U kot

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = -A^\mathsf{T}\vec{x}\} = \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A + A^\mathsf{T})\vec{x} = \vec{0}\} = \\ &= \ker(A + A^\mathsf{T}), \end{aligned}$$

je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$.

b. Najprej izračunamo

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

nato pa $(A + A^\mathsf{T})\vec{a} = [0, 0, 0, 0]^\mathsf{T}$ in $(A + A^\mathsf{T})\vec{b} = [1, -1, -1, 1]^\mathsf{T}$. Vektor $\vec{a}$ leži v U, vektor $\vec{b}$ pa ne.

c. Na matriki $(A + A^\mathsf{T})$ naredimo Gaussovo eliminacijo:

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $A + A^\mathsf{T}$ ima torej rang 3 in $\dim \ker(A + A^\mathsf{T}) = \dim U = 1$. Če vzamemo četrto komponento za parameter in z njo izrazimo ostale tri, dobimo parametrizacijo $[-t, t, -t, t]^\mathsf{T}$. Bazo za U tako tvori na primer vektor $[1, -1, 1, -1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 56.

a. V matriki A vsakemu od vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pripada stolpec, v katerega zapišemo, kako se slika tega vektorja izraža v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, torej

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\vec{a}) & \phi(\vec{b}) & \phi(\vec{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Prehodna matrika P ima po stolpcih vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inverz P^{-1} izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki $[P \mid I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej je

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Za matriko S velja $S = PAP^{-1}$, torej

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. Jedro S določimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrike je 2 in $\dim \ker \phi = 1$, baza za jedro pa je na primer $\{[1,0,0]^\mathsf{T}\}$. Ker jedro ni enako $\{\vec{0}\}$, preslikava ϕ ni injektivna.

Rešitev naloge 57.

a. Naj bosta $A, B \in V$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\vec{a}^\mathsf{T}(A+B)\vec{a} \;=\; \vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a} + \vec{a}^\mathsf{T}B\vec{a} \;=\; 0+0 \;=\; 0$$

in

$$\vec{a}^\mathsf{T}(\alpha A)\vec{a} \;=\; \alpha(\vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a}) \;=\; \alpha\cdot 0 \;=\; 0.$$

Množica V je zaprta za seštevanje in za množenje s skalarjem, torej je vektorski podprostor.

b. Naj bo $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Iz

$$\vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a} \;=\; [1,-1]\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;=\; x-y-z+w \;=\; 0$$

sklepamo, da je

$$V = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid w = y+z-x\}.$$

Ker imamo 4 koordinate in eno vez, je $\dim V = 3$. Eno možno bazo za V dobimo tako, da postavimo po enega od parametrov x, y, z na 1 in ostala dva na 0. Eno možno bazo V torej tvorijo matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Naj bosta $A, B \in V$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\phi_{\vec{a}}(A+B) &= (A+B)\vec{a} = A\vec{a} + B\vec{a} = \\
&= \phi_{\vec{a}}(A) + \phi_{\vec{a}}(B), \\
\phi_{\vec{a}}(\alpha A) &= (\alpha A)\vec{a} = \alpha(A\vec{a}) = \\
&= \alpha\phi_{\vec{a}}(A),
\end{aligned}$$

zato je $\phi_{\vec{a}}$ linearna.

d. Poglejmo, kam se s preslikavo $\phi_{\vec{a}}$ preslikajo bazne matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

glede na standardno bazo $\vec{e}_1 = [1,0]^\mathsf{T}$, $\vec{e}_2 = [0,1]^\mathsf{T}$. Ker je

$$\begin{aligned}
\phi_{\vec{a}}(B_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2, \\
\phi_{\vec{a}}(B_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2, \\
\phi_{\vec{a}}(B_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2,
\end{aligned}$$

je matrika za $\phi_{\vec{a}}$ iz baze $\{B_1, B_2, B_3\}$ v standarno bazo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če na matriki naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta matrika ima očitno rang 1, zato je

$$\dim\ker\phi_{\vec{a}} = \dim V - \dim\operatorname{im}\phi_{\vec{a}} = 3 - 1 = 2.$$

V jedru so matrike oblike $xB_1 + xB_2 + zB_3$. Pri $x = 1$, $z = 0$ dobimo $B_1 + B_2$, pri $x = 0$, $z = 1$ pa B_3. Torej bazo za jedro tvorita matriki

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če na matriki preslikave $\phi_{\vec{a}}$ naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato bazo za $\operatorname{im}\phi_{\vec{a}}$ tvori vektor $[1,1]^\mathsf{T}$ in $\dim\operatorname{im}\phi_{\vec{a}} = 1$.

Rešitev naloge 58.

a. Naj bosta $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\phi(X+Y) &= A(X+Y)-(X+Y)A = \\
&= AX + AY - XA - YA = \\
&= AX - XA + AY - YA = \\
&= \phi(X) + \phi(Y), \\
\phi(\alpha X) &= A(\alpha X) - (\alpha X)A = \\
&= \alpha(AX) - \alpha(XA) = \\
&= \alpha(AX - XA) = \\
&= \alpha\phi(X).
\end{aligned}$$

b. Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

in poračunajmo

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= AX - XA = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+2b & -2a-b \\ c+2d & -2c-d \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2b-2c & 2a+2b-2d \\ 2a-2c-2d & 2b+2c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Slike standardne baze so torej

$$\phi(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(E_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\phi(E_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \phi(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

pripadajoča matrika iz baze $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ v bazo $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ pa

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Jedro dobimo tako, da na matriki preslikave naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike enak 2 in je jedro dvoparametrična družina vektorjev oblike $[z+w,-z,z,w]^\mathsf{T}$. Če izberemo $z=1$ in $w=0$, dobimo $[1,-1,1,0]^\mathsf{T}$, za $z=0$ in $w=1$ pa $[1,0,0,1]^\mathsf{T}$. Baza za jedro sta tako na primer matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za sliko naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bazo $\operatorname{im}\phi$ preberemo iz stolpcev. Predstavljata jo matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 59.

a. Ker je

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = B^\mathsf{T}\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - B^\mathsf{T})\vec{x} = \vec{0}\} = N(A - B^\mathsf{T})$$

ničelni prostor matrike $A - B^\mathsf{T}$, je seveda podprostor domene $\mathbb{R}^3$.

b. Poiščimo bazo za $V = N(A - B^\mathsf{T})$. Na matriki $A - B^\mathsf{T}$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A - B^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike 1 in $\dim N(A - B^\mathsf{T}) = 2$. Če vzamemo y in z za parametra, so vektorji v $N(A - B^\mathsf{T})$ parametrizirani kot $[2z, y, z]^\mathsf{T}$. Za bazo V izberemo vektorja $[2,0,1]^\mathsf{T}$ in $[0,1,0]^\mathsf{T}$. Matrika D bo slikala v $\mathbb{R}^3$ in najlažje bo, če vsak vektor iz baze V ustreza enemu stolpcu matrike D. Tako bo avtomatično $V = C(D)$. Ena možna rešitev je

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izbrali drugo bazo za V in bi dobili drugačno matriko D, za katero bi bil stolpični prostor še vedno enak V. Lahko bi dobili matriko z drugim vrstnim redom teh stolpcev ali pa matriko, v kateri je vsak od stolpcev večkratnik naših. Nazadnje bi lahko število stolpcev poljubno povečali, paziti bi morali le, da so vsi dodatni vektorji linearna kombinacija baznih in sta oba bazna vektorja zares prisotna.

Rešitev naloge 60.

a. Ničelni prostor dobimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če vzamemo x_3 in x_4 za parametra, dobimo parametrizacijo za $N(A)$ z vektorji oblike $[-x_3-x_4, -2x_3-x_4, x_3, x_4]^\mathsf{T}$. Če izberemo $x_3 = -1$ in $x_4 = 0$, dobimo vektor $\vec{v}_1 = [1, 2, -1, 0]^\mathsf{T}$, če izberemo $x_3 = 0$ in $x_4 = -1$ pa vektor $\vec{v}_2 = [1, 1, 0, -1]^\mathsf{T}$. Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je primer baze za $N(A)$. Stolpični prostor dobimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza za $C(A)$ sta torej vektorja $\vec{v}_3 = [1, 0, -1, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_4 = [0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}$.

b. Poskusimo vektor $\vec{a}$ zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$. Zanima nas torej, če obstajata koeficienta α in β, za katera je $\vec{a} = \alpha\vec{v}_3 + \beta\vec{v}_4$, oziroma po komponentah:

$$[2, 3, 7, -2]^\mathsf{T} = \alpha[1, 0, -1, 2]^\mathsf{T} + \beta[0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}.$$

Iz enakosti prvih komponent takoj dobimo $\alpha = 2$, iz drugih pa $\beta = 3$. Vidimo, da je pri teh vrednostih α in β vrednost tretje komponente na desni strani enaka $-\alpha + 3\beta = 7$, vrednost četrte pa $2\alpha - 2\beta = -2$. S tema koeficientoma torej res vektor $\vec{a}$ zapišemo kot linearno kombinacijo $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ ter velja $\vec{a} \in C(A)$.

Poskusimo še vektor $\vec{b}$ zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$. Zanima nas torej, če obstajata koeficienta γ in δ, za katera je $\vec{b} = \gamma\vec{v}_3 + \delta\vec{v}_4$, oziroma po komponentah:

$$[2, 0, -2, 2]^\mathsf{T} = \gamma[1, 0, -1, 2]^\mathsf{T} + \delta[0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}.$$

Iz enakosti prvih komponent takoj dobimo $\gamma = 2$, iz drugih pa $\delta = 0$. Vidimo, da je pri teh vrednostih γ in δ vrednost tretje komponente na desni strani enaka $-\gamma + 3\delta = -2$, kar ustreza levi strani, vrednost četrte komponente pa je $2\gamma - 2\delta = -4$ in ne 2 kot na desni. Vektorja $\vec{b}$ torej ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo

$\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$, zato $\vec{b} \notin C(A)$. Ta del naloge bi lahko rešili tudi tako, da bi izračunali pravokotni projekciji vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na $C(A)$. Vektor namreč leži v podprostoru U natanko tedaj, ko je njegova projekcija na U enaka vektorju samemu.

Rešitev naloge 61.

a. Pišimo $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$. Potem lahko pogoj $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}$ zapišemo kot

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0$$

in po komponentah

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 = 0.$$

Vidimo, da je U ravnina z normalo $[1, -1, 0]^\mathsf{T}$, ki vsebuje izhodišče. Zato je U vektorski podprostor. Alternativno lahko rečemo, da je $U = N(M)$ za matriko

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Najprej poiščimo bazo za U. Iz matrike M lahko takoj preberemo, da so vektorji v $N(M) = U$ oblike $[x_1, x_1, x_3]^\mathsf{T}$. Za bazna vektorja lahko torej vzamemo $[1, 1, 0]^\mathsf{T}$ in $[0, 0, 1]^\mathsf{T}$. Če bo matrika A imela za stolpca ta dva vektorja, potem bo seveda $C(A) = U$, torej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izbrali drugo bazo za U in bi dobili drugačno matriko A, za katero bi bil stolpični prostor še vedno enak U. Lahko bi dobili matriko z drugim vrstnim redom teh stolpcev ali pa matriko, v kateri je vsak od stolpcev večkratnik naših. Nazadnje bi lahko število stolpcev poljubno povečali, paziti bi morali le, da so vsi dodatni vektorji linearna kombinacija baznih in sta oba bazna vektorja zares prisotna.

Rešitev naloge 62.

a. Za $N(A)$ naredimo Gaussovo eliminacijo na matriki A po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike A enak 3 in bo zato $\dim N(A) = 1$. Če vzamemo četrto komponento za parameter, dobimo za vektorje v $N(A)$ parametrizacijo

$$[-t, t, -t, t]^\mathsf{T}.$$

Baza za $N(A)$ je na primer $\{[1,-1,1,-1]^\mathsf{T}\}$. Za $C(A)$ naredimo Gaussovo eliminacijo na matriki A po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je $\dim C(A) = 3$, baza pa je na primer

$$\{[2,0,1,2]^\mathsf{T}, [0,1,0,1]^\mathsf{T}, [0,0,3,-10]^\mathsf{T}\}.$$

b. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ najlažje rešimo tako, da na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vidimo, da so rešitve oblike

$$[1-t, -2+t, 1-t, t]^\mathsf{T}.$$

c. Med rešitvami sistema, ki so oblike $[1-t, -2+t, 1-t, t]^\mathsf{T}$, iščemo tiste, za katere je skalarni produkt z vektorjem $\vec{b}$ enak 0. Veljati mora torej

$$5 \cdot (1-t) + 0 \cdot (-2+t) + 4 \cdot (1-t) + 0 \cdot t = 0,$$

od koder izračunamo $t = 1$. Edina rešitev sistema, ki je pravokotna na vektor $\vec{b}$ je torej $[0,-1,0,1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 63. ⇧

a. Ta del lahko hitro rešimo z geometrijskim premislekom. Ker za vektorski produkt vedno velja

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{a},$$

dobimo skupaj z zahtevo naloge

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{a}$$

enakost $\vec{v} \times \vec{a} = -\vec{v} \times \vec{a}$ oziroma $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{0}$. Ker je vektorski produkt enak $\vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja, ki ju množimo, kolinearna, so v V ravno tisti vektorji $\vec{v}$, ki so vzporedni vektorju $\vec{a}$. Z drugimi besedami, V je premica skozi izhodišče s smernim vektorjem $\vec{a}$. Taka premica je seveda vektorski podprostor in $\dim V = 1$.

Druga možnost je, da primerjamo levo in desno stran in poiščemo parametrizacijo za V. Iz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\begin{bmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ x-y \end{bmatrix},$$

od koder sklepamo, da je $z = 0$ in $x - y = 0$. Vektorji $\vec{v} \in V$ so torej oblike $[x, x, 0]^\mathsf{T}$, zato je $V = \mathcal{L}(\{\vec{a}\})$ in $\dim V = 1$.

b. Primera matrik A in B, za katera je $V = N(A)$ in $V = C(B)$, sta

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 64.

a. Zložimo vektorje v matriko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

in naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je $\dim V = 2$, baza za V pa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

b. Pišimo

$$\vec{v}_4 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$$

oziroma

$$[1, 2, 2]^\mathsf{T} = \alpha[-1, 2, 0]^\mathsf{T} + \beta[0, 2, 1]^\mathsf{T} + \gamma[-3, 2, -2]^\mathsf{T}.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -\alpha - 3\gamma &= 1, \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 2, \\ \beta - 2\gamma &= 2. \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe izrazimo $\beta = 2 + 2\gamma$. Iz prve enačbe dobimo $\alpha = -1 - 3\gamma$ in druga enačba je potem avtomatično izpolnjena. To pomeni, da rešitev ni enolična, za vsako izbiro γ dobimo eno rešitev. Izberimo na primer $\gamma = 0$. Dobimo $\alpha = -1$ in $\beta = 2$, torej je

$$\vec{v}_4 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

6. Ortogonalnost

Rešitev naloge 65.

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,2,0,2]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{0}{9}\vec{u}_1 = [2,-1,2,0]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{4}{9}\vec{u}_1 - \frac{7}{9}\vec{u}_2 = \left[0,\frac{8}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$ še normiramo. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 3$ in $\|\vec{u}_3\| = \frac{4}{3}$, dobimo za ortonormirano bazo $\vec{q}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|u_i\|}$ vektorje

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_3 = \left[0,\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

b. Naj bo $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$. Potem velja $V^\perp = C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$. Bazo $V^\perp$ bo torej generiral vektor, ki razpenja $N(A^\mathsf{T})$. Vemo, da je en sam, ker iz $\dim(V) = 3$ sledi $\dim(V^\perp) = 1$. Ta vektor poiščemo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jedro generira vektor $\vec{u}_4 = [-2,0,2,1]^\mathsf{T}$. Ko ga normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Če označimo z $\vec{x}_i$ projekcijo vektorja $\vec{x}$ na $\vec{q}_i$, potem velja

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4$$

in projekcija $\vec{x}$ na V je enaka

$$\mathrm{proj}_V \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3.$$

Projekcijo na V torej najhitreje izračunamo tako, da od $\vec{x}$ odštejemo njegovo projekcijo na $V^\perp$. Najprej izračunamo

$$\vec{x}_4 = \mathrm{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} = (\vec{q}_4\cdot\vec{x})\vec{q}_4 = -\frac{1}{3}\vec{q}_4 = \left[\frac{2}{9},0,-\frac{2}{9},-\frac{1}{9}\right]^\mathsf{T},$$

nato pa še

$$\mathrm{proj}_V \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_4 = \left[\frac{7}{9},0,\frac{2}{9},\frac{10}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

Seveda pa dobimo isti rezultat, če izračunamo $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in $\vec{x}_3$ ter jih seštejemo.

Rešitev naloge 66.

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,2,2,0]^{\mathsf{T}},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \frac{9}{9}\vec{u}_1 = [-2,0,1,2]^{\mathsf{T}},\\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{9}{9}\vec{u}_1 + \frac{9}{9}\vec{u}_2 = [2,-1,0,2]^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$ še normiramo. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 3$, dobimo za ortonormirano bazo $\vec{q}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|u_i\|}$ prostora $C(A)$ vektorje

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right]^{\mathsf{T}}.$$

b. Ker je $C(A)^{\perp} = N(A^{\mathsf{T}})$, bo bazo $C(A)^{\perp}$ generiral vektor, ki razpenja $N(A^{\mathsf{T}})$. Vemo, da je en sam, ker iz $\dim(C(A)) = 3$ sledi $\dim(C(A)^{\perp}) = 1$. Ta vektor poiščemo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0\\ -3 & -2 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Jedro generira vektor $u_4 = [0,2,-2,1]^{\mathsf{T}}$. Ko ga normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^{\mathsf{T}}.$$

c. Poiskali bomo $\vec{x}_2$, potem pa dobili $\vec{x}_1$ iz enačbe $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Vektor $\vec{x}_2$ je projekcija vektorja $\vec{x}$ na podprostor $C(A)^{\perp}$, ki je generiran z vektorjem $\vec{q}_4$, zato je

$$\vec{x}_2 = \operatorname{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{q}_4)\vec{q}_4 = 6\vec{q}_4 = [0,4,-4,2]^{\mathsf{T}}.$$

Od tu takoj dobimo

$$\vec{x}_1 = \vec{x} - \vec{x}_2 = [1,-4,-5,-2]^{\mathsf{T}}.$$

Lahko pa bi $\vec{x}_1$ izračunali tudi tako, da bi sešteli projekcije vektorja $\vec{x}$ na $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ in $\vec{q}_3$. Rezultat bi bil seveda enak, le nekaj več dela bi imeli.
Razcep $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ je enoličen, ker sta $C(A)$ in $C(A)^{\perp}$ ortogonalna.

Rešitev naloge 67. ⇧

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,1,-1,-1]^{\mathsf{T}},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{4}{4}\vec{u}_1 = [1,0,0,1]^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Ko poskušamo isto narediti še za $\vec{v}_3$, dobimo $\vec{0}$, ker je $\vec{v}_3$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$. Dimenzija podprostora V je torej 2. Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo in dobimo vektorja $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, ki tvorita ortonormirano bazo za V:

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^{\mathsf{T}}.$$

b. Ker je $\dim V = 2$, bo tudi $\dim V^\perp = 2$. Naj bo $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$. Potem je $V^\perp = C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$. Bazo $V^\perp$ bosta torej generirala vektorja, ki razpenjata $N(A^\mathsf{T})$. Poiščemo ju z Gaussovo eliminacijo na A^T po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vektorji v jedru imajo parametrizacijo $[-w, z+2w, z, w]^\mathsf{T}$. Bazo za jedro lahko dobimo tako, da enkrat izberemo za parametra $z = 1$ in $w = 0$, drugič pa $z = 0$ in $w = 1$. Dobimo vektorja $[0,1,1,0]^\mathsf{T}$ in $[-1,2,0,1]^\mathsf{T}$. Oba sta seveda pravokotna na V, moramo pa še poskrbeti, da bosta pravokotna tudi drug na drugega. Gram-Schmidtov postopek drugi vektor popravi v $[-1,1,-1,1]^\mathsf{T}$. Oba vektorja še normiramo. Ortonormirana baza za $V^\perp$ je torej

$$\vec{q}_3 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}, \vec{q}_4 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{x}$ na vektor $\vec{q}_i$ dobimo po formuli

$$\operatorname{proj}_{\vec{q}_i} \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{q}_i)\vec{q}_i.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\vec{q}_1} \vec{x} &= 0 \\
\operatorname{proj}_{\vec{q}_2} \vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T} \\
\operatorname{proj}_{\vec{q}_3} \vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T} = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]^\mathsf{T}, \\
\operatorname{proj}_{\vec{q}_4} \vec{x} &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Projekcijo na podprostor dobimo tako, da seštejemo projekcije na vektorje, ki tvorijo bazo tega podprostora. Tako je

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_V \vec{x} &= \operatorname{proj}_{\vec{q}_1} \vec{x} + \operatorname{proj}_{\vec{q}_2} \vec{x} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}, \\
\operatorname{proj}_{V^\perp} \vec{x} &= \operatorname{proj}_{\vec{q}_3} \vec{x} + \operatorname{proj}_{\vec{q}_4} \vec{x} = \left[-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 68. ⇧

a. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je $U = N(A)$ in $V = N(B)$, zato sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$. Seveda pa bi zadoščalo tudi, če bi preverili, da sta zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem.

b. Bazo za jedro preslikave običajno dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah. Tokrat sta obe matriki že reducirani. Matrika A ima rang 1, zato je $\dim U = \dim N(A) = 2$. Vektorji v $N(A)$ imajo parametrizacijo $[x, 3z-2x, z]^\mathsf{T}$. Pri $x = 1$ in $z = 0$ dobimo $\vec{u}_1 = [1,-2,0]^\mathsf{T}$, pri $x = 0$ in $z = 1$ pa $\vec{u}_2 = [0,3,1]^\mathsf{T}$.

Matrika B ima rang 2, zato je $\dim V = \dim N(B) = 1$. Za bazni vektor lahko vzamemo na primer $\vec{v}_1 = [6,3,2]^\mathsf{T}$.

c. Ker je U dvorazsežen podprostor v $\mathbb{R}^3$, njegovo bazo najlažje dopolnimo do baze $\mathbb{R}^3$ z vektorjem, ki je enak ali vzporeden vektorskemu produktu $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Tako dobimo $\vec{u}_3 = [-2,-1,3]^\mathsf{T}$.

d. Ker je $V = N(B) = C(B^\mathsf{T})^\perp$, je $V^\perp = C(B^\mathsf{T})$. Bazo za $V^\perp$ bomo torej dobili z Gaussovo eliminacijo po stolpcih iz matrike B^T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobimo $\vec{v}_2 = [1,-2,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0,2,-3]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 69.

a. Iščemo 4×2 matriko A in 2×1 vektor $\vec{b}$, za katera bo

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \vec{b}.$$

V enakost $f(x_i) = y_i$ vstavimo vse pare (x_i, y_i) iz tabele in dobimo

$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 &= -4, \\ -\frac{c_1}{2} - 2c_2 &= -1, \\ \frac{c_1}{2} + 2c_2 &= 5, \\ c_1 + c_2 &= 2, \end{aligned}$$

torej je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b. Rešiti moramo normalni sistem

$$A^\mathsf{T} A \vec{x} = A^\mathsf{T} \vec{b}.$$

Ker je

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

je

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T} \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Sistem $A^\mathsf{T} A \vec{x} = A^\mathsf{T} \vec{b}$ zdaj rešimo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej $c_1 = 2$ in $c_2 = 1$.

Rešitev naloge 70.

a. Če vstavimo podatke v zvezo $s(t) = vt + s_0$, dobimo:
$$\begin{aligned} v + s_0 &= 150, \\ 2v + s_0 &= 220, \\ 3v + s_0 &= 330, \\ 4v + s_0 &= 420, \end{aligned}$$
torej je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 150 \\ 220 \\ 330 \\ 420 \end{bmatrix}.$$
Rešitev po metodi najmanjših kvadratov bomo dobili, če namesto tega rešimo sistem
$$A^\mathsf{T} A \begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix} = A^\mathsf{T} \vec{b}.$$
Izračunamo
$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T} \vec{b} = \begin{bmatrix} 3260 \\ 1120 \end{bmatrix}$$
ter naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A^\mathsf{T} A | A^\mathsf{T} \vec{b}]$:
$$\begin{aligned} [A^\mathsf{T} A | A^\mathsf{T} \vec{b}] &= \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 3260 \\ 10 & 4 & 1120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 3260 \\ 0 & 2 & 100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 326 \\ 0 & 2 & 100 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 326 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 276 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 92 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right]. \end{aligned}$$
Rešitev sistema je torej $[92, 50]^\mathsf{T}$.

b. V prejšnji točki smo izračunali, da Metka vozi s hitrostjo $v = 92$km/h, začetno stanje na števcu pa je bilo 50km.

c. Za pot velja zveza $s(t) = 92t + 50$, torej bo ob času $t = 5$ skupna pot enaka $s(5) = 92 \cdot 5 + 50 = 510$. Stanje na števcu bo 510km.

Rešitev naloge 71.

Za rešitev po metodi najmanjših kvadratov moramo izračunati
$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T} \vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 21 \end{bmatrix}.$$
Ko naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema $[A^\mathsf{T} A | A^\mathsf{T} \vec{b}]$, dobimo
$$\begin{aligned} [A^\mathsf{T} A | A^\mathsf{T} \vec{b}] &= \left[\begin{array}{cc|c} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 10 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 11 & 33 \\ -9 & 10 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 10 & 21 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \end{aligned}$$

od koder preberemo rešitev $\vec{x} = [1,3]^{\mathsf{T}}$.

Rešitev naloge 72.

a. Na množici vektorjev $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ izvedemo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{a} = [1,1,0,0]^{\mathsf{T}}, \\
\vec{u}_2 &= \vec{b} - \frac{\vec{b}\,\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{b} - \frac{2}{2}\vec{u}_1 = [0,0,0,2]^{\mathsf{T}} \\
\vec{u}_3 &= \vec{c} - \frac{\vec{c}\,\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{c}\,\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{c} - \frac{2}{2}\vec{u}_1 - \frac{16}{4}\vec{u}_2 = [1,-1,0,0]^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Za $\vec{u}_4$ dobimo 0, ker je $\vec{d}$ linearno odvisen od $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$. Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ še normiramo in dobimo ortonormirano bazo za U:

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_2 = [0,0,0,1]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^{\mathsf{T}}.$$

b. Koeficiente razvoja pravokotne projekcije $\mathrm{proj}_U \vec{u}$ vektorja $\vec{u}$ po ortonormirani bazi $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ dobimo tako, da izračunamo skalarne produkte

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{q}_1 &= [1,2,3,4]^{\mathsf{T}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^{\mathsf{T}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\
\vec{u}\cdot\vec{q}_2 &= [1,2,3,4]^{\mathsf{T}} \cdot [0,0,0,1]^{\mathsf{T}} = 4, \\
\vec{u}\cdot\vec{q}_3 &= [1,2,3,4]^{\mathsf{T}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^{\mathsf{T}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\mathrm{proj}_U \vec{u} = \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{q}_1 + 4\vec{q}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{q}_3 = [1,2,0,4]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 73.

a. Najprej poiščimo tak vektor $\vec{w}$, da bo množica $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Ker je

$$\vec{u} \times \vec{v} = [1,-2,2]^{\mathsf{T}} \times [2,2,1]^{\mathsf{T}} = [-6,3,6]^{\mathsf{T}},$$

lahko vzamemo na primer $\vec{w} = [2,-1,-2]^{\mathsf{T}}$. Iskana projekcijska matrika bo v bazi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ oblike

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ker slika $\vec{u} \mapsto \vec{u}$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}$ in $\vec{w} \mapsto \vec{0}$. Poiskati moramo še prehodno matriko Q, pa bomo lahko izračunali matriko P, ki pripada projekciji v standardni bazi, kot $P = QP'Q^{-1}$. Matrika Q pove, kako se baza $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ izraža s standardno bazo, zato je

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Njen inverz lahko dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[Q|I]$ in je enak

$$Q^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi se lahko prej potrudili in na bazi izvedli Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo (vektorje bi bilo potrebno le še normirati), pa bi lahko na tem mestu namesto inverza uporabili kar transponirano matriko, saj za ortogonalne matrike velja $Q^{-1} = Q^\mathsf{T}$. Nazadnje matrike še zmnožimo:

$$\begin{aligned} P &= QP'Q^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

V pravilnost rešitve se lahko prepričamo tako, da izračunamo $P(\vec{u})$, $P(\vec{v})$ in $P(\vec{w})$. Prva dva se morata preslikati vase, tretji pa v $\vec{0}$.
Z manj dela enak rezultat dobimo, če vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ normiramo (pravokotna sta že), zapišemo matriko

$$Q' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

in izračunamo P kot $P = Q'Q'^\mathsf{T}$.

b.

$$P\vec{x} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

c. Poiskati moramo števili α in β, za kateri bo $P\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Zapisano po komponentah:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 11, \\ -2\alpha + 2\beta &= 8, \\ 2\alpha + \beta &= 7, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\alpha = 1$, $\beta = 5$, zato je $P\vec{x} = \vec{u} + 5\vec{v}$.
Hitreje lahko ta del naloge rešimo, če se spomnimo formule za projekcijo vektorja.

Koeficiente lahko izračunamo kot

$$\alpha = \frac{(P\vec{x}) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 1 \quad \text{in} \quad \beta = \frac{(P\vec{x}) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = 5.$$

Rešitev naloge 74.

a. Točke iz V so zapisane z dvema parametroma, zato je $\dim V = 2$ in moramo poiskati dva bazna vektorja. Z izbiro $x = 1$ in $y = 0$ dobimo vektor $\vec{v}_1 = [1, 0, 1]^\mathsf{T}$, z $x = 0$ in $y = 1$ pa vektor $\vec{v}_2 = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$. Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je baza za V.
b. Na $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ uporabimo Gram-Schmidtov postopek:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1, 0, 1]^\mathsf{T}, \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = [0, 1, 1] - \frac{1}{2}[1, 0, 1]^\mathsf{T} = \left[-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ moramo še normirati. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \sqrt{2}$ in $\|\vec{u}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, sta vektorja

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^\mathsf{T}$$

ortonormirana baza za V.
c. Koeficienta pravokotne projekcije vektorja $\vec{a}$ na prostor V sta skalarna produkta

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{q}_1 &= \sqrt{2}, \\ \vec{a} \cdot \vec{q}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Torej je

$$\operatorname{proj}_V \vec{a} = \sqrt{2}\vec{q}_1.$$

Rešitev naloge 75.

a. V pogoju prepoznamo enačbo ravnine $y - z = 0$, ki vsebuje izhodišče, zato je V vektorski podprostor. Lahko pa bi tudi opazili, da je $V = N(A)$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Ker lahko točke v V parametriziramo kot $[x, y, y]^\mathsf{T}$, lahko bazna vektorja enostavno dobimo s pravo izbiro parametrov. Za $x = 1$ in $y = 0$ dobimo $\vec{v}_1 = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$, za $x = 0$ in $y = 1$ pa $\vec{v}_2 = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$.
c. Če smo zgoraj prepoznali enačbo ravnine, potem vemo, da je njen ortogonalni komplement premica, ki ima za smerni vektor normalo $[0, 1, -1]^\mathsf{T}$. Če nismo razmišljali geometrijsko, potem lahko vektor, ki napenja ortogonalni komplement dobimo kot vektorski produkt

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [0, -1, 1]^\mathsf{T}.$$

d. Iščemo števila α, β in γ, za katera bo

$$\vec{a} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3.$$

Dobimo jih s pomočjo projekcij na vektorje $\vec{v}_i$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1} = \frac{2}{1} = 2,\\
\beta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} = \frac{4}{2} = 2,\\
\gamma &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_3}{\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je res

$$\vec{a} = 2[1,0,0]^\mathsf{T} + 2[0,1,1]^\mathsf{T} + [0,-1,1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 76.

Označimo $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,-1,2]^\mathsf{T}$. Potem je baza stolpičnega prostora $C(A)$ enaka $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Koeficiente razvoja projekcije $\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{b}$ dobimo kot

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{v}_1}\vec{b} &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1} = \frac{6}{2} = 3,\\
\mathrm{proj}_{\vec{v}_2}\vec{b} &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} = \frac{6}{6} = 1.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{b} = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [4,2,2]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 77.

Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ izvedemo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [2,1,2,0,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{9}{9}\vec{u}_1 = [-1,2,0,-2,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_3 &= 0\\
\vec{u}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_4\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_4 - \frac{-9}{9}\vec{u}_1 - \frac{24}{9}\vec{u}_2 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0, -\frac{5}{3}, 2\right]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Vektorje še normiramo: Ker je $\|\vec{u}_1\| = 3$, $\|\vec{u}_2\| = 3$ in $\|\vec{u}_4\| = 3$, je ortonormirana baza sestavljena iz vektorjev $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\vec{u}_1$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\vec{u}_2$ in $\vec{q}_4 = \frac{1}{3}\vec{u}_4$ oziroma

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_4 = \left[\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 78.

a. Podprostor $C(A) \leq \mathbb{R}^4$ je linearna lupina stolpcev matrike A. Označimo $\vec{v}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0,1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [1,1,0,1]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo. Najprej dobimo

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T}, \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{0}{2}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 = [0,1,1,0]^\mathsf{T}, \\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{2}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 = \\ &= [1,1,0,1]^\mathsf{T} - [1,0,0,1]^\mathsf{T} - \left[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right]^\mathsf{T} = \left[0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Če opazimo, da sta vektorja $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ že pravokotna, lahko seveda prva dva računa izpustimo in takoj zapišemo $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ in $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ ter popravimo samo $\vec{v}_3$. Vektorje $\vec{u}_i$ še normiramo in dobimo

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_3 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)$ je $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$.

b. Ker je $C(A) \leq \mathbb{R}^4$ in je $\dim C(A) = 3$, je $\dim C(A)^\perp = 1$. Iščemo vektor $\vec{q}_4 \in \mathbb{R}^4$ z normo 1, ki bo pravokoten na vektorje $\vec{q}_i$ $(i = 1,2,3)$. Hitro lahko uganemo, da bo na vse tri pravokoten vektor $\vec{u}_4 = [1,0,0,-1]^\mathsf{T}$. Ko ga še normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)^\perp$ je $\{\vec{q}_4\}$.

Rešitev naloge 79.

Iz podatkov dobimo predoločen sistem enačb

$$\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 7, \\ a + b + c &= -1, \\ a - b + c &= 8, \\ 9a - 3b + c &= 16, \end{aligned}$$

ki ga zapišemo v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Reševali bomo sistem $A^\mathsf{T}A\vec{x} = A^\mathsf{T}\vec{b}$, zato izračunamo še

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 164 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T}\vec{b} = \begin{bmatrix} 214 \\ -36 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki $[A^\mathsf{T}A|A^\mathsf{T}\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 164 & 0 & 20 & 214 \\ 0 & 20 & 0 & -36 \\ 20 & 0 & 4 & 30 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right],$$

zato je iskana funkcija $g(x) = x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{5}{2}$.

Rešitev naloge 80.

a. Stolpični prostor $C(A)$ je linearna lupina stolpcev matrike A. Na matriki A najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih, da se znebimo tistih stolpcev, ki so linearno odvisni od ostalih. Vemo namreč, da bo tak vsaj en, saj je $C(A) \leq \mathbb{R}^3$ in torej $\dim C(A) \leq 3$. Z uporabo Gaussove eliminacije si bomo torej prihranili vsaj en korak pri Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji. Dobimo

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podprostor $C(A)$ je torej napet na vektorja $\vec{v}_1 = [1,0,2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [0,1,2]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,0,2]^\mathsf{T}, \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{4}{5}\vec{u}_1 = [0,1,2]^\mathsf{T} - \left[\frac{4}{5}, 0, \frac{8}{5}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo. Ker je

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

in

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{25}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

je

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)$ je $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$. Seveda bi lahko na stolpcih matrike A takoj naredili Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo in bi prav tako dobili ortonormirano bazo za $C(A)$.

b. Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $C(A)^{\perp}$ najlažje dobimo tako, da določimo vektor $\vec{u}_3$, ki napenja $C(A)^{\perp}$. Vemo, da bo $\vec{u}_3$ pravokoten na $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$. Prvemu pogoju je lahko zadostiti. Vzamemo na primer vektor $[2,0,-1]^{\mathsf{T}}$ in ga popravimo tako, da bo pravokoten še na $\vec{u}_2$. Hitro vidimo, da bo vektor $[2,2,-1]^{\mathsf{T}}$ pravokoten tako na $\vec{u}_1$ kot na $\vec{u}_2$.
Izračunati moramo torej projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{u}_3$. Enaka je

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a} = \frac{\vec{a}\,\vec{u}_3}{\vec{u}_3\vec{u}_3}\vec{u}_3 = \frac{18}{9}\vec{u}_3 = 2[2,2,-1]^{\mathsf{T}} = [4,4,-2]^{\mathsf{T}}.$$

c. Projekcijo na $C(A)$ bi seveda lahko dobili tako, da bi $\vec{a}$ projicirali na $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ ter rezultata sešteli, vendar je lažje, če namesto tega od $\vec{a}$ odštejemo $\operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a}$. Dobimo

$$\operatorname{proj}_{C(A)}\vec{a} = \vec{a} - \operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a} = [5,3,-2]^{\mathsf{T}} - [4,4,-2]^{\mathsf{T}} = [1,-1,0]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 81.

Če vstavimo dane pare v predpis za f dobimo predoločen sistem enačb

$$\begin{aligned} b &= -5, \\ a+b &= -2, \\ 2a+b &= 4, \\ 3a+b &= 3. \end{aligned}$$

Zapišemo ga v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem $A^{\mathsf{T}}A\vec{x} = A^{\mathsf{T}}\vec{b}$, zato izračunamo

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{\mathsf{T}}\vec{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki $[A^{\mathsf{T}}A|A^{\mathsf{T}}\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 0 & 10 & -45 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Rešitev je torej $a = 3$ in $b = -\frac{9}{2}$ oziroma $f(x) = 3x - \frac{9}{2}$.

Rešitev naloge 82.

Označimo stolpce matrike A z $\vec{v}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0,1,0,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [1,3,1,3]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo in dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{2}{4}\vec{u}_1 = [0,1,0,1]^\mathsf{T} - \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{8}{4}\vec{u}_1 - \frac{2}{1}\vec{u}_2 = \\
&= [1,3,1,3]^\mathsf{T} - [2,2,2,2]^\mathsf{T} - [-1,1,-1,1]^\mathsf{T} = [0,0,0,0]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo, da dobimo vektorja

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T},$$

ki tvorita ortonormirano bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ podprostora $C(A)$.
Na matriki A^T naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v $N(A^\mathsf{T})$ vektorji oblike $[x_1, x_2, -x_1, -x_2]^\mathsf{T}$. Izberemo linearno neodvisna vektorja $\vec{v}_3 = [1,0,-1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_4 = [0,1,0,-1]^\mathsf{T}$. Ker sta pravokotna, ju moramo le še normirati, da dobimo vektorja

$$\vec{q}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_4 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T},$$

ki tvorita ortonormirano bazo $\{\vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ podprostora $N(A^\mathsf{T})$. Ker je $N(A^\mathsf{T}) = C(A)^\perp$, smo z vektorjema $\vec{q}_3$ in $\vec{q}_4$ v resnici dopolnili bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Rešitev naloge 83.

a. Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih na matriki A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo $\vec{v}_1 = [1,0,0,0]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0,1,0,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0,0,1,1]^\mathsf{T}$. Vektorja $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ in $\vec{v}_2 = \vec{u}_2$ sta že pravokotna, zato z Gram-Schmidtovim postopkom popravimo le še vektor $\vec{v}_3$:

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{0}{1}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 = \left[0, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo še $\|\vec{u}_2\| = \sqrt{2}$ in $\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ortonormirano bazo za $C(A)$ torej sestavljajo vektorji

$$\vec{q}_1 = [1,0,0,0]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_3 = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^\mathsf{T}.$$

b. Bazo $C(A)^\perp$ bomo dobili tako, da poiščemo še vektor $\vec{q}_4$, ki $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ dopolni do baze $\mathbb{R}^4$. Najprej opazimo, da je vektor $[0,1,0,-1]^\mathsf{T}$ pravokoten na $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, in to bo še vedno res, če tretjo komponento poljubno spremenimo. Popravimo jo tako, da bo dobljeni vektor pravokoten še na $\vec{q}_3$. Dobimo $\vec{u}_4 = [0,1,1,-1]^\mathsf{T}$ in zato

$$\vec{q}_4 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^\mathsf{T}.$$

Baza za $C(A)^\perp$ je $\{\vec{q}_4\}$.

c. Projekcijo $\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{a}$ najlažje izračunamo tako, da od vektorja $\vec{a}$ odštejemo njegovo projekcijo na $C(A)^\perp$, torej

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{a} &= \vec{a} - (\vec{a}\,\vec{q}_4)\vec{q}_4 = \vec{a} - \frac{\vec{a}\,\vec{u}_4}{\vec{u}_4\vec{u}_4}\vec{u}_4 = \\
&= \vec{a} - \frac{6}{3}\vec{u}_4 = [5,2,4,0]^\mathsf{T} - [0,2,2,-2]^\mathsf{T} = [5,0,2,2]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 84.

Najprej naredimo Gram-Schmidtov postopek na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [2,2,1]^\mathsf{T}, \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{3}{9}\vec{u}_1 = [0,1,1]^\mathsf{T} - \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Vektor $\vec{u}_1$ še normiramo, da dobimo

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Nazadnje moramo poiskati še tak vektor $\vec{q}_3$, da bo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$. Najprej poiščemo vektor $\vec{u}_3$, ki bo pravokoten na $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$. Lahko izberemo poljuben od njiju linearno neodvisen vektor in uporabimo Gram-Schmidtov postopek, lahko pa uganemo $\vec{u}_3 = [1,-2,2]^\mathsf{T}$. Po normiranju dobimo

$$\vec{q}_3 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

7. Lastne vrednosti

Rešitev naloge 85.

Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -8 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1-\lambda & -8 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-(3-\lambda)(3+\lambda)+8) = \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1).
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_{1,2} = 1$ parametriziran z $[y + 2z, y, z]^{\mathsf{T}}$ in sta lastna vektorja na primer

$$\vec{v}_1 = [1, 1, 0]^{\mathsf{T}} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = [2, 0, 1]^{\mathsf{T}}.$$

Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_3 = -1$ parametriziran z $[2z, z, z]^{\mathsf{T}}$ in je ustrezni lastni vektor na primer

$$\vec{v}_3 = [2, 1, 1]^{\mathsf{T}}.$$

Lastni vektorji nam dajo stolpce prehodne matrike P, matrika D pa vsebuje lastne vrednosti po diagonali, zato je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj pa lahko izračunamo

$$\begin{aligned}
A^{2020} &= (PDP^{-1})^{2020} = \\
&= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = \\
&= PD^{2020}P^{-1} = \\
&= PIP^{-1} = \\
&= PP^{-1} = \\
&= I.
\end{aligned}$$

Ker je $D^{2020} = I$ smo se torej lahko izognili izračunu P^{-1}.

Rešitev naloge 86.

a. Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -6 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 3 & 5+\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (\lambda+2)(20-5\lambda+4\lambda-\lambda^2-18) = \\
&= -(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1).
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_3 = 1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + 2I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_{1,2} = -2$ parametriziran z $[x, y, x]^\mathsf{T}$. Lastna vektorja sta na primer

$$\vec{v}_1 = [1, 0, 1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = [0, 1, 0]^\mathsf{T}.$$

Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_3 = 1$ parametriziran z $[2z, z, z]^\mathsf{T}$. Lastni vektor je na primer

$$\vec{v}_3 = [2, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

b. Ker ima matrika A tri različne lastne vektorje, se jo da diagonalizirati. Lastni vektorji nam dajo stolpce prehodne matrike P, matrika D pa vsebuje lastne vrednosti po diagonali, zato je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 87.

a. Iščemo 2×2 matriko A, za katero bo veljalo, da je

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Iz rekurzivne zveze

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

preberemo koeficienta prve vrstice, v drugi pa uporabimo očitno enakost $a_{n-1} = a_{n-1}$. Tako vidimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Izračunamo karakteristični polinom $\det(A - \lambda I)$ za matriko A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_1 = 4$ in $\lambda_2 = -1$. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_1 = 4$ dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - 4I$,

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tu preberemo prvi lastni vektor $\vec{v}_1 = [4, 1]^\mathsf{T}$. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_2 = -1$ dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + I$,

$$A + I = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi lastni vektor je $\vec{v}_2 = [1, -1]^\mathsf{T}$.

c. Vsak vektor iz $\mathbb{R}^2$ lahko razvijemo po bazi iz lastnih vektorjev $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Naredimo to za $\vec{x}_1$:

$$\vec{x}_1 = [a_1, a_0]^\mathsf{T} = [7, 3]^\mathsf{T} = 2 \cdot [4, 1]^\mathsf{T} - 1 \cdot [1, -1]^\mathsf{T} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Zdaj pa na obeh straneh enakosti $\vec{x}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ večkrat zapored uporabimo matriko A, pri čemer upoštevamo, da je $A\vec{v}_1 = 4\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$. Dobimo:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= 2 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = 2 \cdot A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4\vec{v}_1 - (-1)\vec{v}_2 \\ \vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = 2 \cdot 4A\vec{v}_1 - (-1)A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4^2\vec{v}_1 - (-1)^2\vec{v}_2 \\ \vec{x}_4 &= A\vec{x}_3 = 2 \cdot 4^2A\vec{v}_1 - (-1)^2A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4^3\vec{v}_1 - (-1)^3\vec{v}_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidimo, da je v splošnem

$$\vec{x}_n = 2 \cdot 4^{n-1}[4, 1]^\mathsf{T} - (-1)^{n-1}[1, -1]^\mathsf{T}.$$

Če pogledamo prvo komponento tega vektorja, dobimo iskano eksplicitno zvezo

$$a_n = 2 \cdot 4^n + (-1)^n.$$

Rešitev naloge 88.

a. Ko napravimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + 2I$, vidimo, da je rang te matrike enak 2:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo edini lastni vektor za to lastno vrednost, $\vec{v}_1 = [1, 0, -1]^\mathsf{T}$.

b. Ker je

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

je $\vec{v}_2$ lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_2 = 2$.

c. Izračunamo karakteristični polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda+2)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da je tretja lastna vrednost enaka drugi, $\lambda_{2,3} = 2$. Naredimo še Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - 2I$ in dobimo

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je matrika ranga 2, zato dobimo za lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 2$ le en lastni vektor, $\vec{v}_2$. Algebraična kratnost te lastne vrednosti je enaka 2, geometrična pa 1.

Rešitev naloge 89.

Matrika A je 3×2 matrika, ki ima vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ za stolpca, zato je A^T 2×3 matrika, ki ima $\vec{u}^\mathsf{T}$ in $\vec{v}^\mathsf{T}$ za vrstici. Matrika B bo dimenzije 3×3 in

$$B = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}^\mathsf{T} \\ \vec{v}^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \vec{u}\,\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\,\vec{v}^\mathsf{T}.$$

Poglejmo, kam preslika matrika B vektor $\vec{u}$:

$$B\vec{u} = (\vec{u}\,\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\,\vec{v}^\mathsf{T})\vec{u} = (\vec{u}\,\vec{u}^\mathsf{T})\vec{u} + (\vec{v}\,\vec{v}^\mathsf{T})\vec{u} = \vec{u}(\vec{u}^\mathsf{T}\vec{u}) + \vec{v}(\vec{v}^\mathsf{T}\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2\vec{u}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\vec{v}^\mathsf{T}\vec{u} = 0$, ker sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pravokotna. Vidimo, da se je $\vec{u}$ preslikal v svoj večkratnik, zato je $\vec{u}$ lastni vektor matrike B za lastno vrednost $\|\vec{u}\|^2$. Na enak način bi pokazali, da je $\vec{v}$ lastni vektor matrike B za lastno vrednost $\|\vec{v}\|^2$. Za diagonalizacijo matrike B potrebujemo še en lastni vektor in pripadajočo lastno vrednost. Poglejmo, kaj se zgodi z vektorjem $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{aligned} B(\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{u}\,\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\,\vec{v}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= (\vec{u}\,\vec{u}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v}\,\vec{v}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= \vec{u}(\vec{u}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})) + \vec{v}(\vec{v}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})) = 0. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da sta skalarna produkta $\vec{u}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})$ in $\vec{v}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})$ enaka 0, ker je vektorski produkt pravokoten na oba faktorja. To pa pomeni, da je $\vec{u} \times \vec{v}$ lastni vektor za lastno vrednost 0. Ker poznamo vse tri lastne vektorje in pripadajoče lastne vrednosti, lahko zapišemo matriki D in P, za kateri je $B = PDP^{-1}$:

$$D = \begin{bmatrix} \|\vec{u}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|\vec{v}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u} \times \vec{v} \end{bmatrix}.$$

V našem primeru je $\vec{u} \times \vec{v} = [0,1,1]^\mathsf{T}$, $\|\vec{u}\|^2 = 1$ in $\|\vec{v}\|^2 = 2$, torej je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo še

$$D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

in nazadnje

$$\begin{aligned} B^{10} &= (PDP^{-1})^{10} = \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) = \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}\dots P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = \\ &= PD^{10}P^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & -512 \\ 0 & -512 & 512 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 90.

Pišimo $\vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Potem lahko rekurzivno zvezo zapišemo v matrični obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$ takole:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Izračunamo karakteristični polinom matrike A, $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)(\lambda+1)$, ter poiščemo pripadajoča lastna vektorja $\vec{v}_1 = [2,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,2]^\mathsf{T}$. Zdaj pa premislimo, kako bo to vplivalo na izračun vektorjev $\vec{x}_n$. Očitno velja

$$\vec{x}_0 = [3,3]^\mathsf{T} = [2,1]^\mathsf{T} + [1,2]^\mathsf{T} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Potem pa je

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \\ \vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = A(2\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 2A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ \vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = A(4\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 8\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \\ &\vdots \\ \vec{x}_n &= A\vec{x}_{n-1} = 2^n\vec{v}_1 + (-1)^n\vec{v}_2. \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \vec{x}_n = 2^n\vec{v}_1 + (-1)^n\vec{v}_2 = 2^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^n + (-1)^n \\ 2^n + 2\cdot(-1)^n \end{bmatrix},$$

oziroma

$$a_n = 2\cdot 2^n + (-1)^n \quad \text{in} \quad b_n = 2^n + 2\cdot(-1)^n.$$

Rešitev naloge 91.

Sistem zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Poiščemo lastne vrednosti matrike A. Njen karakteristični polinom je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)+2 = \lambda^2-3\lambda+2 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$

zato sta lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Za vsako (realno) lastno vrednost λ_i dobimo v rešitvi člen oblike konstanta $\cdot\, e^{\lambda_i \cdot t}$, torej za neke konstante a, b, c in d velja

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^t + be^{2t}, \\ y(t) &= ce^t + de^{2t}. \end{aligned}$$

Dveh konstant se znebimo tako, da zgornja izraza za $x(t)$ in $y(t)$ odvajamo in pogledamo obe strani prvotne zveze. Ker je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ae^t + 2be^{2t}, \\ \dot{y}(t) &= ce^t + 2de^{2t}, \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} ae^t + 2be^{2t} &= \dot{x}(t) = -2y(t) = -2(ce^t + de^{2t}) = \\ &= (-2c)e^t - 2de^{2t}, \\ ce^t + 2de^{2t} &= \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) = ae^t + be^{2t} + 3(ce^t + de^{2t}) = \\ &= (a+3c)e^t + (b+3d)e^{2t}. \end{aligned}$$

Izraza iz začetka in konca vsake verige damo na eno stran enakosti in dobimo

$$\begin{aligned} (a+2c)e^t + (2b+2d)e^{2t} &= 0, \\ (a+2c)e^t + (b+d)e^{2t} &= 0. \end{aligned}$$

Vsi koeficienti pred funkcijami morajo biti enaki 0, zato velja $a = -2c$ in $b = -d$. Splošni rešitvi tega sistema diferencialnih enačb sta torej

$$\begin{aligned} x(t) &= -2ce^t - de^{2t}, \\ y(t) &= ce^t + de^{2t}. \end{aligned}$$

Ker imamo podana začetna pogoja $x(0) = 3$ in $y(0) = -2$, lahko določimo še konstanti c in d. Ko vstavimo $t = 0$ v zgornji enakosti, dobimo

$$\begin{aligned} 3 &= -2c - d, \\ -2 &= c + d. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $c = d = -1$, zato sta iskani funkciji

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^t + e^{2t}, \\ y(t) &= -e^t - e^{2t}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 92.

a. Ker je matrika A spodnje trikotna, so lastne vrednosti enake diagonalnim elementom. Torej je $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = 2$.

b. Matriko bomo lahko diagonalizirali, če bo obstajala baza iz lastnih vektorjev. Lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih bodo avtomatično linearno neodvisni, problem pa lahko povzročijo večkratne lastne vrednosti, kjer morda lastnih vektorjev ni dovolj. Zato najprej poglejmo lastni podprostor za dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah matrike $A - I$ dobimo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato so v lastnem podprostoru $N(A - I)$ vektorji oblike $[0, 0, z]^\mathsf{T}$. To pomeni, da je edini lastni vektor za to lastno vrednost (do skalarnega večkratnika natančno) $\vec{v} = [0, 0, 1]^\mathsf{T}$. Ker je algebraična kratnost te lastne vrednosti 2, geometrijska kratnost pa 1, se matrike A ne da diagonalizirati.

Rešitev naloge 93.

a. Bazo za ničelni prostor poiščemo s pomočjo Gaussove eliminacije po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorji v jedru so oblike $[0, y, y]^\mathsf{T}$, zato lahko za bazni vektor vzamemo $\vec{v}_1 = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$.

b. Bazo za stolpični prostor poiščemo s pomočjo Gaussove eliminacije po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bazo tvorita na primer vektorja $\vec{v}_2 = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0, 1, -1]^\mathsf{T}$.

c. Ničelni prostor $N(A)$ je lastni podprostor za lastno vrednost 0, saj za vsak vektor $\vec{x} \in N(A)$ velja $A\vec{x} = 0 = 0 \cdot \vec{x}$. Lastni vektorji za neničelne lastne vrednosti so vsi vsebovani v $C(A)$.

d. En lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 0$ je $\vec{l}_1 = \vec{v}_1$. Ostali lastni vektorji se bodo izražali kot linearne kombinacije baznih vektorjev podprostora $C(A)$, torej

$$\vec{l} = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3.$$

Ker je lastni vektor določen samo do skalarnega večkratnika natančno, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\beta = 1$. Hitro lahko preverimo, da je

$$A\vec{v}_2 = [1, 1, -1]^\mathsf{T} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \text{in} \quad A\vec{v}_3 = [2, 0, 0]^\mathsf{T} = 2\vec{v}_2.$$

To pa pomeni, da je

$$\begin{aligned} A\vec{l} &= A(\alpha\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \\ &= \alpha A\vec{v}_2 + A\vec{v}_3 = \\ &= \alpha(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + 2\vec{v}_2 = \\ &= (\alpha+2)\vec{v}_2 + \alpha\vec{v}_3. \end{aligned}$$

Če pa je $\vec{l}$ lastni vektor matrike A, mora poleg tega veljati še

$$A\vec{l} = k\vec{l} = (k\alpha)\vec{v}_2 + k\vec{v}_3.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 2 &= k\alpha, \\ \alpha &= k, \end{aligned}$$

in po hitri eliminaciji druge enačbe zvezo

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

z rešitvama $\alpha_1 = -1$ in $\alpha_2 = 2$.

V prvem primeru dobimo lastni vektor

$$\vec{l}_2 = -\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = [-1, 1, -1]^\mathsf{T},$$

v drugem primeru pa

$$\vec{l}_3 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = [2, 1, -1]^\mathsf{T}.$$

Pripadajoči vrednosti sta enaki koeficientu $k = \alpha$, zato je $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 2$.

Rešitev naloge 94.

a. Bazo za ničelni prostor dobimo tako, da naredimo na matriki A Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v $N(A)$ vektorji oblike $[x, y, -y, -x]^\mathsf{T}$. S primerno izbiro parametrov dobimo linearno neodvisna vektorja $[1, 0, 0, -1]^\mathsf{T}$ in $[0, 1, -1, 0]^\mathsf{T}$, ki sta že pravokotna. Zato ju samo še normiramo in smo za $N(A)$ dobili ortonormirano bazo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, pri čemer je

$$\vec{v}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_2 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}.$$

b. Bazo za stolpični prostor dobimo tako, da naredimo na matriki A Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da sta v $C(A)$ linearno neodvisna vektorja $[0,1,1,0]^\mathsf{T}$ in $[1,0,0,1]^\mathsf{T}$, ki sta tudi že pravokotna. Zato ju samo še normiramo in smo za $C(A)$ dobili ortonormirano bazo $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, pri čemer je

$$\vec{v}_3 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Hitro se prepričamo, da je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Torej $A^2 = 2A$. Naj bo $\vec{v}$ poljuben lastni vektor matrike A. Potem velja $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ za nek λ. Izračunajmo $A^2\vec{v}$ na dva načina. Po eni strani je

$$A^2\vec{v} = A(A\vec{v}) = A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v}) = \lambda^2\vec{v},$$

po drugi pa

$$A^2\vec{v} = 2A\vec{v} = 2\lambda\vec{v}.$$

Od tod sklepamo, da je $2\lambda = \lambda^2$ oziroma $\lambda(\lambda-2) = 0$. Edini možni lastni vrednosti sta torej 0 in 2. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 0$ že poznamo, saj je kar enak $N(A)$, $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ pa sta pripadajoča lastna vektorja.
Pri računanju matrike A^2 pa smo opazili, da je $A\vec{v}_3 = 2\vec{v}_3$, ko smo množili prvi stolpec desne matrike z vrsticami leve matrike. Podobno smo pri množenju drugega stolpca desne matrike z vrsticami leve matrike opazili, da je $A\vec{v}_4 = 2\vec{v}_4$. Preostala dva lastna vektorja sta torej $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ in pripadata lastni vrednosti $\lambda_{3,4} = 2$.

d. Ker vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ že tvorijo ortonormirano bazo, samo še zapišemo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 95.

a. Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1+\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(3-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Pri tem smo najprej od druge vrstice odšteli prvo, iz druge vrstice izpostavili $(1+\lambda)$, prvemu stolpcu prišteli drugega, naredili razvoj po prvem stolpcu in nazadnje upoštevali, da je determinanta spodnje trikotne matrike produkt diagonalnih elementov.
Vidimo, da sta lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 3$ in $\lambda_3 = -1$. Najprej si oglejmo lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$. Ker je

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo samo en lastni vektor, $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$. Matrike A torej ne moremo diagonalizirati.
Za lastno vrednost $\lambda_3 = -1$ dobimo

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej je pripadajoči lastni vektor $\vec{v}_2 = [1,-1,-2]^\mathsf{T}$.

b. Ker je $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$ lastni vektor za lastno vrednost 3, velja $A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1$ oziroma $\|A\vec{v}_1\| = 3\|\vec{v}_1\| \geq 2\|\vec{v}_1\|$. Za iskani vektor $\vec{x}$ lahko torej vzamemo $\vec{x} = \vec{v}_1$.

Rešitev naloge 96.

a. Najprej dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\cdot 4 - 6\cdot 3 = 16 - 18 = -2, \\ b_1 &= 3\cdot 4 - 5\cdot 3 = 12 - 15 = -3, \end{aligned}$$

nato pa

$$\begin{aligned} a_2 &= 4\cdot(-2) - 6\cdot(-3) = -8 + 18 = 10, \\ b_2 &= 3\cdot(-2) - 5\cdot(-3) = -6 + 15 = 9. \end{aligned}$$

b. Sistem zapišemo v obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1).$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = 1$. Izračunamo še pripadajoča lastna vektorja. Pri $\lambda_1 = -2$ dobimo

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej je lastni vektor enak $\vec{v}_1 = [1,1]^\mathsf{T}$. Pri $\lambda_2 = 1$ je

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je $\vec{v}_2 = [2,1]^\mathsf{T}$. Začetni pogoj zapišemo kot
$$\vec{x}_0 \;=\; [4,3]^\mathsf{T} \;=\; 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$
Upoštevamo, da je $A\vec{v}_1 = -2\vec{v}_1$ ter $A\vec{v}_2 = \vec{v}_2$ in izračunamo
$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 \;=\; 2A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 \;=\; 2(-2)\vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\
\vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 \;=\; 2(-2)A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 \;=\; 2(-2)^2\vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\
&\;\vdots\\
\vec{x}_n &= A\vec{x}_{n-1} \;=\; 2(-2)^n\vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$
Če splošno formulo zapišemo po komponentah, dobimo
$$\vec{x}_n \;=\; \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \;=\; 2(-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 2(-2)^n + 2 \\ 2(-2)^n + 1 \end{bmatrix},$$
torej je $a_n = 2(-2)^n + 2$.

Rešitev naloge 97.

a. Najprej poiščemo karakteristični polinom matrike A:
$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3\lambda & -\lambda \end{vmatrix} =\\
&= \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =\\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 10) =\\
&= -\lambda(\lambda+2)(\lambda-5).
\end{aligned}$$
Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 5$. Za lastne podprostore poiščemo ničelne prostore matrik
$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
A + 2I &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
A - 5I &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$
Vidimo, da so lastni vektorji $\vec{v}_1 = [0,3,-1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [-2,1,3]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [5,1,3]^\mathsf{T}$.

b. Matrika D bo diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali, matrika P pa bo vsebovala lastne vektorje v vrstnem redu, ki se ujema z vrstnim redom lastnih vrednosti v D, torej

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

c. Če želimo namesto matrike P iz prejšnje točke ortogonalno matriko Q, moramo samo še normirati lastne vektorje, matrika D pa lahko ostane nespremenjena. Lastni vektorji so namreč že pravokotni. Ker je

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \\ \|\vec{v}_2\| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \\ \|\vec{v}_3\| &= \sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{35}, \end{aligned}$$

morajo biti stolpci matrike Q enaki

$$\vec{q}_1 = \left[0, \frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 98.

Naj bo $\vec{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$ in zapišimo rekurzivno zvezo v obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A - \lambda I) = \frac{1}{2}(2\lambda + 1)(\lambda - 1),$$

zato sta lastni vrednosti enaki $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 1$. Ker je

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{2}I &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A - I &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sta lastna vektorja $\vec{v}_1 = [1, -2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1, 1]^\mathsf{T}$. Vektor $\vec{x}_0$ izrazimo kot linearno kombinacijo lastnih vektorjev. Pišimo

$$\vec{x}_0 = [0, 1]^\mathsf{T} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = [\alpha + \beta, -2\alpha + \beta].$$

S primerjavo komponent hitro vidimo, da je $\alpha = -\frac{1}{3}$ in $\beta = \frac{1}{3}$, zato je

$$\vec{x}_0 = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2.$$

Ker sta $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ lastna vektorja, je $A\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = \vec{v}_2$. Dobimo torej

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2, \\
\vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2, \\
\vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2, \\
&\vdots \\
\vec{x}_n &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

torej je po komponentah

$$\vec{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T} = \left[-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Od tu dobimo

$$a_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

Rešitev naloge 99.

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2,$$

zato so lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Ker je

$$\begin{aligned}
A + I &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A - I &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

je lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = -1$ enak $\vec{v}_1 = [1, 1, -1]^\mathsf{T}$. V lastnem podprostoru za $\lambda_{2,3} = 1$ so vektorji oblike $[-y + z, y, z]^\mathsf{T}$, kjer sta $y, z \in \mathbb{R}$ poljubna parametra. Če izberemo $y = 0$ in $z = 1$, dobimo $\vec{v}_2 = [1, 0, 1]^\mathsf{T}$, pri $y = 1$ in $z = 0$ pa $\vec{v}_3 = [-1, 1, 0]^\mathsf{T}$. Seveda bi lahko izbrali tudi kakšno drugo kombinacijo parametrov in bi dobili drugačna lastna vektorja. Pomembno je le, da parametra izberemo tako, da sta dobljena lastna vektorja linearno neodvisna.

Matriko A lahko torej zapišemo kot $A = PDP^{-1}$, kjer je

$$D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iščemo še $p(A) = A^{2018} - A^2 + 2A$. Najprej izračunajmo

$$A^{2018} = PD^{2018}P^{-1} = PP^{-1} = I \quad \text{in} \quad A^2 = PD^2P^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Torej je

$$p(A) = I - I + 2A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 100.

a. Najprej dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3, \\ b_1 &= a_0 - b_0 = 1 - 2 = -1, \end{aligned}$$

nato

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1 = 3 + (-1) = 2, \\ b_2 &= a_1 - b_1 = 3 - (-1) = 4, \end{aligned}$$

in nazadnje

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + b_2 = 2 + 4 = 6, \\ b_3 &= a_2 - b_2 = 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

b. Očitno je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c. Karakteristični polinom matrike A je enak $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$, torej sta lastni vrednosti $\lambda_1 = \sqrt{2}$ in $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Ker je

$$\begin{aligned} A - \sqrt{2}I &= \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A + \sqrt{2}I &= \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sta lastna vektorja $\vec{v}_1 = [1,\ \sqrt{2}-1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [-1,\ \sqrt{2}+1]^\mathsf{T}$ ter velja $A\vec{v}_1 = \sqrt{2}\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = -\sqrt{2}\vec{v}_2$.

d. Naj bo

$$\vec{x}_0 = [1,2]^\mathsf{T} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = [\alpha - \beta,\ \alpha(\sqrt{2}-1) + \beta(\sqrt{2}+1)]^\mathsf{T}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1, \\ \alpha(\sqrt{2}-1) + \beta(\sqrt{2}+1) &= 2. \end{aligned}$$

Rešitvi tega sistema sta $\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)$ in $\beta = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)$. Z večkratno uporabo matrike A na x_0 dobimo

$$x_n = \alpha A^n \vec{v}_1 + \beta A^n \vec{v}_2 = \alpha(\sqrt{2})^n \vec{v}_1 + \beta(-\sqrt{2})^n \vec{v}_2.$$

Od tu iz prve komponente preberemo

$$a_n = \alpha(\sqrt{2})^n - \beta(-\sqrt{2})^n,$$

iz druge pa

$$b_n = \alpha(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n + \beta(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2})^n.$$

Vstavimo še zgoraj izračunana α in β in dobimo eksplicitni formuli za a_n in b_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2})^n - \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)(-\sqrt{2})^n, \\ b_n &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

Ker je $\frac{1}{4} = (\sqrt{2})^{-4}$, $(3\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1) = 4-\sqrt{2}$ in $(3\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+1) = 4+\sqrt{2}$ lahko izraza še malo polepšamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2})^{n-4} - \left(3\sqrt{2}-2\right)(-\sqrt{2})^{n-4}, \\ b_n &= (4-\sqrt{2})(\sqrt{2})^{n-4} + (4+\sqrt{2})(-\sqrt{2})^{n-4}. \end{aligned}$$

Čisto za konec izračunamo še

$$\begin{aligned} a_{2018} &= (3\sqrt{2}+2)(\sqrt{2})^{2014} - (3\sqrt{2}-2)(-\sqrt{2})^{2014} = \\ &= (3\sqrt{2}+2)\cdot 2^{1007} - (3\sqrt{2}-2)\cdot 2^{1007} = \\ &= 2^{1007}(3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}+2) = \\ &= 2^{1007}\cdot 4 = 2^{1009}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 101.

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A-\lambda I) = -(\lambda+2)^2(\lambda-1),$$

zato so lastne vrednosti matrike A enake $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_3 = 1$. Ker je

$$\begin{aligned} A+2I &= \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A-I &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

imamo za $\lambda_{1,2} = -2$ lastni vektor $\vec{v}_1 = [0,1,1]^\mathsf{T}$, za $\lambda_3 = 1$ pa lastni vektor $\vec{v}_2 = [2,1,2]^\mathsf{T}$. Ker pri dvakratni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -2$ nimamo dveh linearno neodvisnih lastnih vektorjev, se matrike A ne da diagonalizirati. Taka matrika P torej ne obstaja.

Literatura

[1] B. Orel, *Linearna algebra*, Založba FRI, 2015, `http://matematika.fri.uni-lj.si/LA/la1.pdf` .
[2] D. Poole, *Linear Algebra, A Modern Introduction*, Brooks/Cole, 2011.
[3] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 2016.