Matematika 1
Rešene teoretične naloge

januar 2021

Kazalo

Rešene naloge z izročkov

1 Matrike, sled, norma, Kroneckerjev produkt, pozitivna semidefinitnost...

✓ 1. Pokažite, da za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

$$||A||_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2},$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A. Pokažite na primeru, da enakost ne velja za nesimetrične matrike.

Ker je A simetrična matrika, jo lahko zapišemo kot:

$$A = QDQ^T,$$

kjer je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & . & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Zato

$$D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & . & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$||A||_F^2 = \mathrm{tr}(A^T A) = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2),$$

torej je

$$||A||_F = \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2}.$$

Protiprimer za nesimetrične:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$||A||_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

2. Drži ali ne drži?

✓ (a) Če je matrika A obrnljiva, potem je $\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$.

Trditev ne drži. Za protiprimer vzamemo identično 2×2 matriko. Njen inverz je ista matrika s $\mathrm{tr}(I^{-1}) = 2$ in $\mathrm{tr}(I) = 2$. Ker $2 \neq 1/2$, trditev ne drži.

✓ (b) Za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ za lastnimi vrednostmi 1,2,3,4, je $||A||_F = \sqrt{10}$.

Ker je A je simetrična, jo lahko zapišemo kot $A = QDQ^T$, kjer je D diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali. Sledi

$$tr(D^2) = tr(A^2) = tr(A^TA) = \|A\|_F^2$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$$

Ker $\sqrt{10} \neq \sqrt{30}$, trditev ne drži.

✓ (c) Če sta singularni vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ enaki σ in τ, potem sta singularni vrednosti matrike A^2 enaki σ^2 in τ^2.

Denimo, da imamo matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Singularni vrednosti A sta torej $0, 1$.

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Singularni vrednosti A^2 sta $0, 0$.

Trditev torej ne drži. Singularni vrednosti matrike $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sta 0 in 1, singularni vrednosti matrike $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa sta obe 0.

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

✓ (a) Dokažite, da velja $\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} \leq \lambda_1 ||\vec{x}||^2$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Naj bo $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$, kjer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ONB.
Potem je $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$.
Potem je

$$\begin{aligned}
\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} &= (\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T} A(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n) \\
&= (\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T}(\alpha_1 A\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n A\vec{v}_n) \\
&= (\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T}(\alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n\vec{v}_n) \\
&= \alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \ldots + \alpha_n^2\lambda_n||\vec{v}_n||^2 \\
\lambda_1||\vec{x}||^2 &= \lambda_1\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x} \\
&= \lambda_1(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T}(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n) \\
&= \alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \ldots + \alpha_n^2\lambda_1||\vec{v}_n||^2 \\
&\Rightarrow \vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x} \leq \lambda_1||\vec{x}||^2
\end{aligned}$$

✓ (b) Dokažite, da velja $\max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x}}{\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x}} = \lambda_1$.

Naj bo $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, kjer $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ ONB.
Potem je $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$.
Potem je

$$\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x} = \alpha_1^2||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2||\vec{v}_n||^2$$
$$\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} = \alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2\lambda_n||\vec{v}_n||^2$$
$$\frac{\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}}{\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x}} = \frac{\alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2\lambda_n||\vec{v}_n||^2}{\alpha_1^2||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2||\vec{v}_n||^2}$$
$$||\vec{v}_i|| = 1, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$
$$\Rightarrow \frac{\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}}{\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x}} = \frac{\alpha_1^2\lambda_1 + \dots + \alpha_n^2\lambda_n}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \leq \frac{\alpha_1^2\lambda_1 + \dots + \alpha_n^2\lambda_1}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} = \frac{\lambda_1(\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2)}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} = \lambda_1$$
$$\text{enakost velja, ko je } \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_i : \frac{\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}}{\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x}} = \frac{\alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2}{\alpha_1^2||\vec{v}_1||^2} = \lambda_1$$
$$\Rightarrow \max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}}{\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x}} = \lambda_1$$

✓ (c) Dokažite, da je tudi matrika $\lambda_1 I_n - A$ pozitivno semidefinitna.

Naj bo $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, kjer $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ ONB.
Potem je $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$.
Potem je

$$\begin{aligned}
\vec{x}^\mathsf{T}(\lambda_1 I_n - A)\vec{x} &= \lambda_1\vec{x}^\mathsf{T}I_n\vec{x} - \vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} = \lambda_1\vec{x}^\mathsf{T}\vec{x} - \vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} \\
&= \lambda_1(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T}(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n) \\
&- (\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n)^\mathsf{T}A(\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n) \\
&= \alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2\lambda_1||\vec{v}_n||^2 \\
&- \alpha_1^2\lambda_1||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2\lambda_n||\vec{v}_n||^2 \\
&= \alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_1)||\vec{v}_1||^2 + \alpha_1^2(\lambda_2 - \lambda_1)||\vec{v}_1||^2 + \dots + \alpha_n^2(\lambda_n - \lambda_1)||\vec{v}_n||^2
\end{aligned}$$

P : tule so $\lambda_1^2 - \lambda_i^2$, ne?

$$\geq 0$$
$$(\alpha_i^2 \geq 0, (\lambda_i - \lambda_1) \geq 0 \text{P : ravnoobratno}, ||\vec{v}_i||^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha_i^2(\lambda_i - \lambda_1)||\vec{v}_i||^2 \geq 0)$$
$$\Rightarrow \vec{x}^\mathsf{T}(\lambda_1 I_n - A)\vec{x} \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 I_n - A \text{ je pozitivno semidefinitna}$$

P: To je sicer ok. Ampak, ali lahko napišete dokaz v eni vrstici z uporabo točke (b)?

✓ 4. Če sta matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ simetrični pozitivno semidefinitni matriki, pokažite, da je tudi $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna matrika.

A ima lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ki so vse večje ali enake 0. B ima lastne vrednosti $\mu_1, \dots, \mu_m$, ki so prav tako večje ali enake 0. Potem vemo da je množica lastnih vrednosti $A \otimes B$ enaka $\{\lambda_i\mu_j;\ \lambda_i$ lastna vrednost A, μ_j lastna vrednost B $\}$. Tako vidimo, da so vse lastne vrednosti $A \otimes B$ prav tako večje ali enake 0 in iz tega lahko sklepamo, da je tudi $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

✓ 5. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simetrična matrika z negativno determinanto. Ali je matrika A pozitivno definitna, negativno definitna, nedefinitna ali nič od naštetega?

Ker je $det(A)$ negativna, matrika A Sylvestrovem izreku ne more biti pozitivno definitna. Lahko bi bila negativno definitna, če bi bila determinanta sode k-te vodilne glavne podmatrike pozitivna, vendar za $k = 2$ ni (je negativna). Zato je ta matrika nedefinitna.

✓ 6. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ter $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Pokažite, da je bločna matrika $\begin{bmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & C \end{bmatrix}$ (simetrična) pozitivno semidefinitna natanko tedaj, ko je matrika $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\mathsf{T} & C \end{bmatrix}$ pozitivno semidefinitna.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^\mathsf{T} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T A + y(-B)^T & x^T(-B) + yC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$
$$= x^T Ax - yB^T x - x^T By + yCy =$$
$$= \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^\mathsf{T} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \geq 0$$

P: Ker je potrebno pokazati ekvivalenco, bi bilo dobro dodati tudi poved o tem, zakaj velja obrat.

7. Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrični pozitivno semidefinitni matriki.

✓ (a) Pokažite, da obstaja takšna pozitivno semidefinitna matrika K, da velja $K^2 = A$.

Naj bo $A = QDQ^\mathsf{T}$, kjer je D diagonalna z nenegativnimi elementi. Definirajmo $K = Q\sqrt{D}Q^\mathsf{T}$. Velja

$$A = QDQ^\mathsf{T} = (Q\sqrt{D}Q^\mathsf{T})(Q\sqrt{D}Q^\mathsf{T}) = K^2$$

Naj ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_1, ..., \lambda_n$, za katere velja, da so večje ali enake 0. Ker je A simetrična matrika, zanjo velja, da ima A^k lastne vrednosti $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$, je tudi matrika K pozitivno semidefinitna, saj je kvadratni koren pozitivnih števil ali ničle vselej pozitiven ali enak 0.

✓ (b) Ker je matrika v točki (a) ena sama, jo označimo s $K = \sqrt{A}$ in imenujemo koren matrike A. Pokažite, da je $\langle A, B\rangle = ||\sqrt{A}\sqrt{B}||_F^2$.

$||\sqrt{A}\sqrt{B}||_F^2 = tr((\sqrt{A}\sqrt{B})(\sqrt{A}\sqrt{B})^\mathsf{T}) = tr(\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B}^\mathsf{T}\sqrt{A}^\mathsf{T}) = tr(AB) = tr(A^\mathsf{T}B) = \langle A, B\rangle$

✓ 8. Naj bo $A = B^\mathsf{T}B$ takšna pozitivno semidefinitna matrika velikosti $n \times n$, da za nek vektor $x \in \mathbb{R}^n$ velja $x^\mathsf{T}Ax = 0$.

Pokažite, da je $Bx = 0$ in nato sklepajte, da velja tudi $Ax = 0$.

$x^\mathsf{T}Ax = 0$
$x^\mathsf{T}B^\mathsf{T}Bx = 0$
$(Bx)^\mathsf{T}(Bx) = 0$
$\|Bx\|^2 = 0$
$Bx = 0$
Sklepanje, ker je $Bx = 0$, da je potem tudi $Ax = 0$:
$B^\mathsf{T}Bx = 0$ in $A = B^\mathsf{T}B$
$Ax = 0$

9. Drži ali ne drži?

✓ (a) $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(C^\top B^\top A^\top)$.

$(A(BC))^\top = (BC)^\top A^\top = C^\top B^\top A^\top \Rightarrow \mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(C^\top B^\top A^\top)$.

✓ (b) Če je $A = uu^T$, kjer je $u = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, potem je $||A||_F = 5$.

$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow ||A||_F = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(A^\top A)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}5 & 10\\10 & 20\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{25} = 5$

✓ (c) Če je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ obrnljiva matrika s singularnima vrednostima σ in τ, potem je $||A^{-1}||_F = \sqrt{\sigma^{-2} + \tau^{-2}}$.

Če je $A = U\Sigma V^\top$ SVD matrike A, potem je

$$A^{-1} = (V^\top)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = (V^\top)^\top\Sigma^{-1}U^\top = V\Sigma^{-1}U^\top$$

SVD matrike A^{-1}. Torej sta singularni vrednosti A^{-1} enaki $\frac{1}{\sigma}$ in $\frac{1}{\tau}$. In je sled $\mathrm{tr}\,(A^{-1}) = \sqrt{\Sigma(\sigma_i^{-1})^2} = \sqrt{\sigma^{-2} + \tau^{-2}}$

2 Vektorski prostori in linearne preslikave

✓ 1. Naj bo V vektorski prostor ter $U, W \subseteq V$ vektorska prostora v V. Pokažite, da je tudi $U \cap W$ vektorski prodprostor v V.

Naj bosta $z, x \in U \cap W$. Sledi $z \in U$, $z \in W$, $x \in U$ in $x \in W$. Ker je U vektorski podprostor, je $z + x \in U$ in ker je W vektorski podprostor, je $z + x \in W$, in zato tudi $z + x \in U \cap W$.

Naj bo $x \in U \cap W$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Če $\alpha \cdot x \in U$ in $\alpha \cdot x \in W$, potem je tudi $\alpha \cdot x \in U \cap W$.

Ker je $U \cap W$ zaprta za množenje s skalarjem in seštevanje, je vektorski podprostor v V.

2. Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\tau(A) = \mathrm{tr}(A)$.

✓ (a) Pokažite, da je τ linearna.

Če $\alpha \in \mathbb{R}$, potem iz lastnosti sledi $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$ velja

$$\tau(\alpha A) = \mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) = \alpha\tau(A).$$

Zaradi lastnosti sledi $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ velja

$$\tau(A + B) = \mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \tau(A) + \tau(B).$$

Torej je τ linearna preslikava.

✓ (b) Zapišite matriko, ki pripada τ v standardnih bazah $\mathbb{R}^{3\times 3}$ in $\mathbb{R}$.

$\tau(E11) = \tau(E22) = \tau(E33) = 1$
$\tau(E12) = \tau(E13) = ... = 0$
$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

✓ (c) Določite bazo $\mathrm{im}\tau$.

Preslikava slika matrike v realna števila. Vsa realna števila so "linearna kombinacija"konstante 1, torej $\mathrm{im}\tau = \{1\}$.

✗ (d) Določite bazo $\ker\tau$.

P: Zapišite bolj razumljivo.
$\vec{x} = [x_1 \dots x_9]^\top \in \ker\tau$
$x_1 = E_{111}; x_5 = E_{222}; x_9 = E_{333};$
$x_1 + x_5 + x_9 = 0$
$x_1 = -x_5 - x_9$
splošni zapis: $[-x5 - x9, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9]^\top$
$(x5[-1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]\ +\ x9[-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1] + xi[a_j])^\top,$
$j = 2, \dots, 4, 6, \dots, 8; a_j = 1$ če $i = j,\ 0$ sicer.

$$\ker\tau = \left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

? 3. Naj bo $\tau\colon V \to U$ linearna preslikava iz vektorskega prostora V v vektorski prostor U. Pokažite, da je τ injektivna natanko tedaj, ko je $\ker\tau = \{0\}$.

Preslikava je linearna, torej ohranja linearne kombinacije elementov. Če jedro ne vsebuje samo ničelnega vektorja, potem preslikava ne slika samo enega vektorja v ničelni vektor vektorskega prostora U, torej ne slika vsakega vektorja v svoj vektorj, torej ni injektivna.
P: Potrebujete še obrat.
P: Tule se trudite še enkrat dokazati implikacijo v isto smer. Potrebujete obrat: Če je jedro trivialno, da je potem preslikava injektivna. Ker je τ injektivna je matrika preslikave (A) polnega ranga P: zakaj? , torej je $dim(im(\tau)) = dim(A)$. Ker velja $dim(ker(\tau)) + dim(im(\tau)) = dim(A)$, potem mora biti $dim(ker(\tau)) = 0$.
~~u, v vektorja iz V, potem tau(alfa u + beta v) = alfa (tau(u)) * beta(tau(v)). če u + v = 0, potem tau(u + v) = 0 če u + v = 0 in tau linearna, potem tau(u + v) = 0~~

✓ 4. Naj bo $\mathcal{V}$ množica vseh simetričnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} A & S \\ -S & A \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika ($A^\mathsf{T} = A$), $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pa poševno simetrična ($S^\mathsf{T} = -S$). Pokažite, da je $\mathcal{V}$ vektorski prostor.

Naj bo $A' = \begin{bmatrix} A & S_1 \\ -S_1 & A \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} B & S_2 \\ -S_2 & B \end{bmatrix}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\alpha A' + \beta B' = \begin{bmatrix} \alpha \cdot A & \alpha \cdot S_1 \\ -\alpha \cdot S_1 & \alpha \cdot A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot B & \beta \cdot S_2 \\ -\beta \cdot S_2 & \beta \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot A + \beta \cdot B & \alpha \cdot S_1 + \beta \cdot S_2 \\ -\alpha \cdot S_1 - \beta \cdot S_2 & \alpha \cdot A + \beta \cdot B \end{bmatrix}$
$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ je simetrična matrika, saj množenje matrike s skalarjem in seštevanje istoležnih elementov ne vpliva na simetričnost matrike.
Iz enakega razloga je $S_3 = \alpha \cdot S_1 + \beta \cdot S_2$ poševno simetrična matrika.
Velja še $-S_3 = -\alpha \cdot S_1 - \beta \cdot S_2$, za katero velja $S_3^\mathsf{T} = -S_3$.
Tako dobimo simetrično matriko $\begin{bmatrix} C & S_3 \\ -S_3 & C \end{bmatrix}$.
Dobljena matrika je take oblike, kot so matrike v prostoru $\mathcal{V}$, torej je $\mathcal{V}$ vektorski podprostor.

5. Drži ali ne drži? (Pri vektorskih podprostorih določite tudi bazo.)

✓ (a) Matrike velikosti $n \times n$, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Trditev ne drži, ker med takimi matrikami ni ničelne matrike. Ničelna matrika ima namreč v vseh vrsticah same ničle, ki se ne morejo sešteti v 1.

✓ (b) Če je U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.

Ne drži. Drži le, če so $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linearno neodvisni.

✓ (c) Množica vseh 3×3 matrik z vsemi diagonalnimi elementi enakimi 0 je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Trditev drži. Množica je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
Naj bosta $A = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 0 & & \alpha \cdot * \\ & \alpha \cdot 0 & \\ \alpha \cdot * & & \alpha \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot 0 & & \beta \cdot * \\ & \beta \cdot 0 & \\ \beta \cdot * & & \beta \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \alpha \cdot * + \beta \cdot * \\ & 0 & \\ \alpha \cdot * + \beta \cdot * & & 0 \end{bmatrix}$

✓ (d) Linearna preslikava slika linearno odvisne vektorje v linearno odvisne.

Trditev drži.
Ker je preslikava linearna vemo, da ohranja linearne kombinacije. Linearno odvisni vektorji so taki, ki jih je možno izraziti kot linearno kombinacijo drugih vektorjev. Ker preslikava ohranja linearne kombinacije, je tudi preslikani vektor linearna kombinacija drugih vektorjev (ki so preslikave vektorjev, katerih kombinacija je nepreslikani vektor).
P: OK. Znate napisati s simboli?

✓ (e) Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.

Ne drži. Matrike v $\mathbb{R}^{2\times 4}$ so oblike

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix} \tag{1}$$

Torej je vse take matrike možno izraziti z linearno kombinacijo matrik $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32}, E_{41}, E_{42}$, ki so med seboj linearno neodvisne. Baza je množica, ki vsebuje minimalno število linearno neodvisnih vektorjev, ki še razpenjajo prostor. Zgornja množica vektorjev je torej baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ in ima 8 elementov, kar je več kot 4, torej trditev ne drži.

✓ (f) Vse $n\times n$ matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Drži. Ob seštevanju dveh takšnih matrik in ob množenju s skalarjem dobimo matriko velikosti $n \times n$, ki ima vse vrstice med seboj enake.

✓ (g) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.

$\dim(V) = 7 = |B_V|$, kjer je B_V neka baza prostora V. Vektorji v bazi morajo biti linearno neodvisni, kar so, ker so ortogonalni.

✓ (h) Vse $n \times n$ matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ne drži, ker če izberemo $\alpha = -1$ in matriko A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in V$, potem αA ni v tem prostoru.

✓ (i) Množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Drži. Ohranja se seštevanje in množenje s skalarjem. Ko seštevamo dve zgornje trikotni matriki namreč dobimo zgornje trikotno, saj seštevamo samo isto ležeče elemente na diagonali in nad njo. Isto velja za množenje s skalarjem.

✓ (j) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v vektorskem prostoru dimenzije 9 vsebuje vsaj 9 elementov.

Ne drži. Primer: $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$ Množica je linearno neodvisna in ima manj kot 9 elementov.

✓ (k) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

Ne drži. Ravnina ni vektorski podprostor, saj ne vsebuje ničelnega vektorja.

✓ (l) Vse $n \times n$ matrike C, za katere velja $C^2 = I$, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ne drži. Množica ne vsebuje ničelne matrike.

✓ (m) Vse $n \times n$ matrike H, za katere velja $\mathrm{rang} H = n$, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ne drži. Vektorski prostor rabi imeti ničelni element, matrika samih ničel pa nima rang n ampak rang 0.

? (n) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisni vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.

Trditev ne drži. Trije linearno odvisni vektorji ne morejo razpenjati ravnine v $\mathbb{R}^3$.
~~Ne drži. Trije linearno odvisni vektorji $\in \mathbb{R}^3$ ne morejo razpenjati prostora v $\mathbb{R}^3$.~~ P: Lahko! In ga. Je pa res, da lahko morda razpenjajo le enodimenzionalni prostor :)

✓ (o) Matrike velikosti $n \times n$, ki imajo prvo vrstico ničelno, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Drži. Če seštejemo dve matriki s prvo ničelno vrstico bo rezultat matrika s prvo ničelno vrstico. Taka matrika P: ne matrika, ampak množica takšnih matrik je torej zaprta za seštevanje. V kolikor poljubno realno število množimo z 0 bo rezultat vedno enak 0. Torej je množica matrik s prvo ničelno vrstico zaprta tudi za množenje s skalarjem.

✓ (p) Vse $m \times n$ matrike X, katerih produkt z vnaprej dano $n \times q$ matriko J je enak ničelni matriki, tvorijo vektorski prostor v $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Drži. Če imamo dve matriki $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ki sta iz omenjene množice želimo pokazati, da je $X_1 + X_2 \in U$ in $\alpha X_1 \in U$, kar pomeni da mora za te dve matriki veljati, da se z vnaprej določeno matriko $J \in \mathbb{R}^{n\times q}$ pomnožita v 0.
Velja

$$(X_1 + X_2)J = X_1J + X_2J = 0,$$

ker velja $X_1J = 0$ in $X_2J = 0$, in velja $(\alpha X_1)J = \alpha X_1 J = 0$, ker velja $X_1J = 0$, torej je U vektorski prostor.

✓ 6. Pokažite, da sta vsota in produkt s skalarjem linearnih preslikav zopet linearni preslikavi.

P: Ubesedite.
Naj bosta τ in ψ linearni preslikavi.
Njuna vsota je definirana kot $(\tau + \psi)(v) = \tau(v) + \psi(v)$
Iz linearnosti τ in ψ sledi
$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u)$
$\psi(\alpha v + \beta u) = \alpha\psi(v) + \beta\psi(u)$

$(\tau + \psi)(\alpha v + \beta u) = \tau(\alpha v + \beta u) + \psi(\alpha v + \beta u)$
$(\tau + \psi)(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) + \alpha\psi(v) + \beta\psi(u)$
$(\tau + \psi)(\alpha v + \beta u) = \alpha(\tau(v) + \psi(v)) + \beta(\tau(u) + \psi(u))$
$(\tau + \psi)(\alpha v + \beta u) = \alpha((\tau + \psi)(v)) + \beta((\tau + \psi)(u))$

7. Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom $\tau(p(x)) = x^2p'(x)$.

✓ (a) Pokažite, da je τ linearna.

$$\begin{aligned}\tau(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= x^2(\alpha p(x) + \beta q(x))' = \\ &= x^2(\alpha p'(x) + \beta q'(x)) = \\ &= \alpha x^2 p'(x) + \beta x^2 q'(x) = \\ &= \alpha\tau(p(x)) + \beta\tau(q(x))\end{aligned}$$

✓ (b) Zapišite matriko, ki ustreza preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$.

$B_{R_1[x]} = \{1, x\}$
$\tau(1) = 0$
$\tau(x) = x^2$
$A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
P: Če boste imeli čas, dodajte vezni tekst. Sicer vse OK.

✗ (c) Določite bazo $\ker\tau$.

Jedro linearne preslikave τ so vsi polinomi, ki jih ta preslikava slika v ničelni prostor. τ v ničelni prostor slika vse polinome stopnje 0 zato je baza jedra preslikave τ:
$B_{\ker\tau} = \{1\}$
P: Le dodajte, zakaj τ slika v 0 le konstantne polinome.
τ v 0 slika le linearne kombinacije baze jedra, torej konstantne polinome.

✗ (d) Določite bazo $\mathrm{im}\tau$.

$B_{\mathrm{im}\tau} = \mathcal{L}\{x^2\}$ P: Utemeljite.

? 8. Pokažite, da je slika $\mathrm{im}\tau$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ vektorski podprostor v U.

Naj bo $u_1, u_2 \in \mathrm{im}(\tau)$. Potem $u_1 = \tau(v_1)$ in $u_2 = \tau(v_2)$ in za neka $v_1, v_2 \in V$. Sledi $\tau(\alpha v_1 + \beta v_2)$ = $\alpha\tau(v_1) + \beta\tau(v_2)$ = $\alpha u_1 + \beta u_2$ P: in zato ... Slika linearne preslikave je zaprta za množenje s skalarjem in seštevanje, zato je vektorski podprostor v U.

✓ 9. Pokažite, da je kompozitum linearnih preslikav zopet linearna preslikava.

Za linearno preslikavo velja $\tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v)$ in $\tau(\alpha v) = \alpha\tau(v)$, kompozitum pa je $(\theta \circ \tau)(v) = \theta(\tau(v))$. Torej moramo na kompozitumu pokazati, da veljata zgornji pravili, kar sledi iz:

$$\theta(\tau(u+v)) = \theta(\tau(u) + \tau(v)) = \theta(\tau(u)) + \theta(\tau(v))$$
$$\theta(\tau(\alpha v)) = \theta(\alpha\tau(v)) = \alpha\theta(\tau(v))$$

✓ 10. Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\tau\colon V \to V$. Če je $u + v$ tudi lastni vektor za τ, potem pokažite, da u in v pripadata isti lastni vrednosti.

Velja $\tau(u) = \lambda_1 u$, $\tau(v) = \lambda_2 v$ ter $\tau(u+v) = \lambda(u+v)$ potem zapišimo

$$\lambda(u+v) = \tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v) = \lambda_1 u + \lambda_2 v$$

natanko tedaj, ko je $\lambda_1 = \lambda_2$. P: Utemeljite, zakaj sledi $\lambda_1 = \lambda_2$. To velja, ker sta vektorja u in v linearno neodvisna. P: Lepše bi bilo vreči v enakosti vse u in v na isto stran in izpostaviti, da bi lahko trdili, da morata biti koeficienta ničelna.

✓ 11. Pokažite, da je jedro $\ker\tau$ linearne preslikave $\tau\colon V \to U$ vektorski podprostor v V.

Jedro linearne preslikave je množica vseh vektorjev iz V, ki se preslikajo v 0. Naj bosta u in v vektorja v jedru $\ker\tau$ linearne preslikave.
Torej velja:
$$\tau(\alpha v + \beta u) = \alpha\tau(v) + \beta\tau(u) = 0 + 0 = 0$$

3 Večkratni integrali

✓ 1. Naj bo (u, v) novi koordinatni sistem v $\mathbb{R}^2$, definiran z

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v,$$

kjer $u \in \mathbb{R}$ and $v \in [0, 2\pi]$. Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

$$J_{u,v} = \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{bmatrix}$$

$$\det J_{u,v} = e^{2u} \cos^2 v + e^{2u} \sin^2 v = e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) = e^{2u}$$

✓ 2. Naj bodo (u, v, w) nove koordinate v $\mathbb{R}^3$, definirane s predpisom

$$x = u \cos v, y = 2u \sin v, z = 3w.$$

kjer je $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ in $w \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

$$J_{u,v,w} = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v & 0 \\ 2 \sin v & 2u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det J_{u,v,w} = 3(2u \cos^2 v + 2u \sin^2 v) = 6u(\cos^2 v + \sin^2 v) = 6u$$

✓ 3. Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = 3ue^v, y = 2we^u, z = u.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

$$J_{u,v,w} = \begin{bmatrix} 3e^v & 3ue^v & 0 \\ 2we^u & 0 & 2e^u \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det J_{u,v,w} = 1 \cdot (3ue^v \cdot 2e^u) = 6ue^{u+v}$$

✓ 4. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ neničelno število. Zapišite naslednji integral s spremembo v polarni koordinatni sistem

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Gre za četrtino kroga s polmerom a. Rešitev je torej

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r \cdot f(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi) dr \right) d\varphi.$$

✓ 5. Zamenjajte vrstni red integracije:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy = \int_?^? \left(\int_?^? f(x, y) dy \right) dx$$

Spodnjo mejo x lahko predstavimo z enačbo $x = \sqrt{y}$. Če jo kvadriramo, dobimo $y = x^2$. Zamenjan vrstni red integracije je torej

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

✓ 6. Zapišite integral

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy$$

v cilindričnih koordinatah.

Zunanja integrala predstavljata krožnico s polmerom 1, z pa predstavlja višino telesa in raste proporcionalno s polmerom kroga. Telo, ki ga dobimo, je torej narobe obrnjen stožec. Izvirni integral tako zapišemo kot

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_r^1 r \cdot f(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z)\, dz \right) d\varphi \right) dr.$$

4 Optimizacija funkcij več spremenljivk

1. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija treh spremeljivk. Za vsako od točk $P, R \in \mathbb{R}^3$ določite in utemeljite, ali sta lokalni minimum, lokalni maksimum, ali nista ekstremalni točki ali pa iz danih podatkov ne moremo ugotoviti, katerega tipa sta točki.

✓ (a.) $f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0$, $f_{xx}(P) = 3, f_{yy}(P) = -1, f_{xy}(P) = 0$.

Točka P je lokalni ekstrem, ker so prvi odvodi funkcije po vseh treh spremenljivkah v tej točki enaki 0, vendar pa ne vemo, katerega tipa je. Hessejeva matrika je namreč enaka

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & ? \\ 0 & -1 & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

Po Sylvestrovem kriteriju sklepamo, da je matrika H nedefinitna, saj sta determinanti prvih dveh glavnih podmatrik H po vrsti pozitivna in negativna. Točka P je torej sedlo.

✓ (b.) $f_x(R) = f_y(R) = f_z(R) = 1$, $f_{xx}(R) = f_{yy}(R) = f_{zz}(R) = 1, f_{xy}(R) = f_{yz}(R) = f_{xz}(R) = 0$.

Točka R ni lokalni ekstrem, ker so prvi odvodi funkcije v tej točki različni od 0.

2. Ali obstaja takšna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$

in ima v točki $(x,y) = (0,0)$

✓ (a) lokalni minumum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

Da, f ima v točki $(0,0)$ lokalni minimum, saj so vse determinante vodilnih glavnih podmatrik Hessejeve matrike pozitivne. Primer take funkcije je $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$.

✓ (b) lokalni maksimum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

Ne. Hessejeva matrika je pozitivno definitna, zato v tej točki lokalni maksimum ne obstaja.

✓ 3. Denimo, da funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ doseže maksimalno vrednost na krivulji $x^2 + 2y^2 = 3$ v točki $(1,1)$. Ali sta $(\mathrm{grad} f)(1,1)$ in $[1,2]^\mathsf{T}$ linearno odvisna?

Poimenujmo krivuljo $x^2 + 2y^2 = 3$ z g. Vemo, da sta v lokalnem ekstremu funkcije f gradienta funkcije f in krivulje g vzporedna.

$$(\mathrm{grad} g) = \begin{bmatrix} 2x \\ 4y \end{bmatrix}$$

$(\mathrm{grad} g)$ je v točki $(1,1)$ torej enak $[2,4]^\mathsf{T}$, ta vektor pa je dvakratnik vektorja $[1,2]^\mathsf{T}$. $(\mathrm{grad} f)(1,1)$ in $[1,2]^\mathsf{T}$ sta zato linearno odvisna.

✓ 4. Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ in funkciji $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirani kot $f(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{a}$ in $g(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}$. Izračunajte $\frac{\partial(f(\vec{x})g(\vec{x}))}{\partial \vec{x}}$.

Upoštevamo pravilo $\frac{\partial(\vec{x}^\mathsf{T}\vec{a})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(\vec{a}^\mathsf{T}\vec{x})}{\partial \vec{x}}$.
$\frac{\partial((\vec{x}^\mathsf{T}\vec{a})(\vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}))}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial((\vec{x}^\mathsf{T}\vec{a})(\vec{b}^\mathsf{T}\vec{x}))}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^\mathsf{T}(\vec{a}\vec{b}^\mathsf{T} + (\vec{a}\vec{b}^\mathsf{T})^\mathsf{T}) = \vec{x}^\mathsf{T}(\vec{a}\vec{b}^\mathsf{T} + \vec{b}\vec{a}^\mathsf{T})$

✓ 5. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnostjo $A^\mathsf{T} = -A$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right)$.

$\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right) = \vec{x}^\mathsf{T}(A + A^\mathsf{T}) + 2 \cdot 5\vec{x}^\mathsf{T} \cdot 5I = \vec{x}^\mathsf{T}(A - A) + 50\vec{x}^\mathsf{T} = 50\vec{x}^\mathsf{T}$

✓ 6. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ izračunajte $\frac{\partial ||A\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}}$.

$\frac{\partial ||A\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}} = 2(A\vec{x})^\mathsf{T}A = 2\vec{x}^\mathsf{T}A^\mathsf{T}A$

? 7. Naj bodo $B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $\vec{b}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$. Za funkcijo

$$f(\vec{x}) = (B\vec{x} + \vec{b})^\mathsf{T}C(D\vec{x} + \vec{d})$$

izračunajte $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2}$.

Funkcijo lahko odvajamo kot produkt ali pa jo zapišemo kot vsoto štirih členov in odvajamo vsakega posebej.
$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = (B\vec{x} + \vec{b})^\mathsf{T}\, CD + (C(D\vec{x} + \vec{d}))^\mathsf{T}B = \vec{x}^\mathsf{T}B^\mathsf{T}CD + \vec{b}^\mathsf{T}CD + \vec{x}^\mathsf{T}D^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B + \vec{d}^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B$
Pri drugem odvodu najprej transponiramo rezultat prvega odvoda in nato odvajamo dobljen rezultat.
$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^\mathsf{T}B^\mathsf{T}CD + \vec{b}^\mathsf{T}CD + \vec{x}^\mathsf{T}D^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B + \vec{d}^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B)^\mathsf{T} = D^\mathsf{T}C^\mathsf{T}B + B^\mathsf{T}CD$

✓ 8. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrika ter $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirane s predpisom

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} - \vec{x}^\mathsf{T}\vec{b}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{2} \cdot 2\vec{x}^\mathsf{T} A - \vec{b}^\mathsf{T} = \vec{x}^\mathsf{T} A - \vec{b}^\mathsf{T} = \vec{0}$$

Iz zgornjega pogoja in ker je A pozitivno definitna, je obrnljiva, dobimo $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Drugi odvod je enak

$$\frac{\partial(\vec{x}^\mathsf{T} A - \vec{b}^\mathsf{T})^\mathsf{T}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(A^\mathsf{T}\vec{x} - \vec{b})}{\partial \vec{x}} = A^\mathsf{T} = A.$$

Ker je A pozitivno definitna matrika, je lokalni ekstrem lokalni minimum.

9. Pokažite, da so naslednje funkcije konveksne:

✓ (a) $f(x, y) = e^y - \log x$,

$f_x(x, y) = -\frac{1}{x}, f_y(x, y) = e^y$

$f_{xx}(x, y) = x^{-2}, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, f_{yy}(x, y) = e^y$
Dobimo Hessejevo matriko $\begin{bmatrix} x^{-2} & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$, ki je po Sylvestrovem kriteriju vedno pozitivno definitna, ne glede na to, kakšni vrednosti imata x in y. $f(x, y)$ je zato konveksna.

✓ (b) $g(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^\mathsf{T} A\vec{x}$, kjer je A pozitivno semidefinitna matrika,

$\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{2}\vec{x}^\mathsf{T}(A + A^\mathsf{T})$
$\frac{\partial^2 g(\vec{x})}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial \frac{1}{2}(A^\mathsf{T}+A)\vec{x}}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{2}(A^\mathsf{T} + A)$
$\frac{\partial^2 g(\vec{x})}{\partial \vec{x}^2}$ je pozitivno semidefinitna matrika, saj je A pozitivno semidefinitna matrika. Posledično je $g(\vec{x})$ konveksna.

✓ (c) $h(\vec{x}) = ||\vec{x}||^2$,

$\frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^\mathsf{T}$
$\frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial^2 \vec{x}} = 2I$, kjer je I identična matrika.
$2I$ je pozitivno definitna matrika, zato je $h(\vec{x})$ konveksna.

✓ (d) $k(\vec{x}) = \vec{a}^\mathsf{T}\vec{x}$, kjer je $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

$\frac{\partial k(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{a}^\mathsf{T}$
$\frac{\partial^2 h(\vec{x})}{\partial^2 \vec{x}} = 0$
0 je pozitivno semidefinitna matrika, zato je $k(\vec{x})$ konveksna.

✓ 10. Za dane vektorje $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ poiščite takšne $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, da bo povprečna kvadratna razdalja med vektorjem $\vec{x}$ in vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ najmanjša možna.

Problem lahko zapišemo v obliki funkcije $f(\vec{x}) = \frac{||\vec{x}-\vec{a}_1||^2+...+||\vec{x}-\vec{a}_k||^2}{k}$. Če izračunamo odvod te funkcije, dobimo $\frac{2}{k}((\vec{x}-\vec{a}_1)^\mathsf{T}+...+(\vec{x}-\vec{a}_k)^\mathsf{T})$. Če to enačimo z 0, dobimo:

$$\frac{2}{k}(\vec{x}-\vec{a}_1)^\mathsf{T} + ... + \frac{2}{k}(\vec{x}-\vec{a}_k)^\mathsf{T} = 0$$

$$\frac{2k}{k}\vec{x}^\mathsf{T} - \frac{2}{k}\vec{a}_1^\mathsf{T} - ... - \frac{2}{k}\vec{a}_k^\mathsf{T} = 0$$

$$2\vec{x} = \frac{2}{k}\vec{a}_1 + ... + \frac{2}{k}\vec{a}_k$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}_1 + ... + \vec{a}_k}{k}$$

? 11. Za pozitivno (semi)definitno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simetrično matriko $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ter neničelni $b \in \mathbb{R}$ poiščite najmanjšo in največjo vrednost kvadratne forme $\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}$ pri pogoju $\vec{x}^\mathsf{T}B\vec{x} = b$.

$L(\vec{x},\lambda) = \vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} - \lambda(\vec{x}^\mathsf{T}B\vec{x} - b)$
$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^\mathsf{T}A - \lambda\ 2\vec{x}^\mathsf{T}B = 0$
$\vec{x}^\mathsf{T}A - \lambda\ \vec{x}^\mathsf{T}B = 0 \quad /\vec{x}$
$\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} - \lambda\ \vec{x}^\mathsf{T}B\vec{x} = 0$
$\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} - \lambda\ b = 0 \Rightarrow \vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} = \lambda\ b \geq 0$
$...?$

Ker je A PD, jo lahko zapišemo kot $M^\mathsf{T}M$.
$\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} = \vec{x}^\mathsf{T}M^\mathsf{T}M\vec{x} = (M\vec{x})^\mathsf{T}(M\vec{x}) = ||M\vec{x}||^2$
Naj bo $y = Mx \Rightarrow x = M^{-1}y$
$\vec{x}^\mathsf{T}B\vec{x} = b \Rightarrow y^\mathsf{T}(M^{-1})^\mathsf{T}BM^{-1}y = b$
Naj bo $C = (M^{-1})^\mathsf{T}BM^{-1} \Rightarrow y^\mathsf{T}Cy = b$
Torej iščemo največjo in najmanjšo vrednost $||y||^2$ pri pogoju $y^\mathsf{T}Cy = b$
$L(\vec{x},\lambda) = ||y||^2 - \lambda(y^\mathsf{T}Cy - b)$
$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2y^\mathsf{T} - \lambda y^\mathsf{T}(C + C^\mathsf{T}) = 0$
$...C\ simetrična?$

? 12. Naj bodo dani vektorji in matriki

$$P = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, \vec{q} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, r = 3, A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \text{ in } \vec{b} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Poiščite najmanjšo vrednost funkcije $\vec{x}^\mathsf{T}P\vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}(\vec{x} + r)$ pri pogoju, da $\vec{x}$ reši linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$.

$L(\vec{x},\vec{\lambda}) = \vec{x}^\mathsf{T} P\vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}(\vec{x}+r) - \vec{\lambda}^\mathsf{T}(A\vec{x} = \vec{b})$
$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^\mathsf{T}(P+P^\mathsf{T}) + \vec{q}^\mathsf{T} - \vec{\lambda}^\mathsf{T} A = \vec{0}^\mathsf{T}$
$\Rightarrow (P+P^\mathsf{T})\vec{x} + A^\mathsf{T}\vec{\lambda} = -\vec{q}$
$A\vec{x} = \vec{b}$
$\begin{bmatrix} P+P^\mathsf{T} & A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2&2&2&1&0 \\ 2&2&2&1&1 \\ 2&2&2&0&1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\0\\1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2&2&2&1&0&0 \\ 2&2&2&1&1&1 \\ 2&2&2&0&1&1 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right]$
$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -1\\1\\0 \end{bmatrix}, \quad f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1\\1\\0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1\\1\\0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\\2\\3 \end{bmatrix} \right) = 6$

? 13. Območje A v $\mathbb{R}^n$ je konveksno, če je za poljubni točki $x, y \in A$ tudi točka $tx+(1-t)y \in A$. Pokažite, da je presek konveksnih množic konveksna množica.

K_1, K_2 koveksni $(x_i, y_i \in K_i \ : tx_i + (1-t)y_i \in K_i,\ t \in [0,1],\ i = \{1,2\}))$
$x, y \in K_1 \cap K_2 \Rightarrow x, y \in K_1,\ x, y \in K_2$
$x, y \in K_1 :\ tx + (1-t)y \in K_1$ ker je K_1 konveksna
$x, y \in K_2 :\ tx + (1-t)y \in K_2$ ker je K_2 konveksna
$\Rightarrow tx + (1-t)y \in K_1 \cap K_2 \Rightarrow K_1 \cap K_2$ je konveksna

? 14. Naj bodo $g_i \colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, konveksne funkcije na konveksni množici $\mathcal{D}$. Pokažite, da je tedaj območje

$$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{D};\ g_i(x) \leq 0 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, m\}$$

konveksna množica.

naj bosta $x, y \in \mathcal{D}_0$
$z = tx + (1-t)y \Rightarrow z \in \mathcal{D} \quad (t \in [0,1])$
$g_i(z) = g_i(tx + (1-t)y) \leq t\ g_i(x) + (1-t)\ g_i(y) \leq 0$
(ker $t \geq 0,\ g_i(x) \leq 0 \Rightarrow t\ g_i(x) \leq 0$ in $(1-t) \geq 0,\ g_i(y) \leq 0 \Rightarrow t\ (1-t)\ g_i(y) \leq 0$)
$\Rightarrow z \in \mathcal{D}_o$

15. Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje naslednjih problemov:

✓ (a)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \ & x + y^2 + z^2 \\ \text{pri pogojih} \ & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 4) - \mu(x + y + z)$
$L_x = 1 - 2\lambda x - \mu = 0$
$L_y = 2y - 4\lambda y - \mu = 0$
$L_z = 2z - \mu = 0$

$x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$
$x + y + z - 1 = 0$
$\lambda \leq 0$
$\lambda(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$

✓ (b)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & xyz \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{aligned}$$

$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xyz - \lambda(x^2 + 2y^2 - 4) - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$
$L_x = yz - 2\lambda x - 2\mu x = 0$
$L_y = xz - 4\lambda y - 2\mu y = 0$
$L_z = xy - 2\mu z = 0$

$x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$
$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$
$\lambda \leq 0$
$\lambda(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$

✓ (c)

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & 2x + 2y^2 + xz \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ & x + z = 0 \\ & xy \geq 0 \end{aligned}$$

$L(x, y, z, \lambda, \mu, \vartheta) = 2x + 2y^2 + xz - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + z) - \vartheta(-xy)$
$L_x = 2 + z - 2\lambda x - \mu x + \vartheta y = 0$
$L_y = 4y - 2\lambda y + \vartheta x = 0$
$L_z = x - \mu = 0$

$-xy \leq 0$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$
$x + z = 0$
$\vartheta \leq 0$
$\vartheta(xy) = 0$

5 Dodano: ostale naloge z izročkov

Naloge z izročkov, ki niso v prejšnjem poglavju.

1. Pokažite naslednje enakosti in neenakosti, ki veljajo za rang matrik:

✗ (a) $\text{rank}(A^\top) = \text{rank}(A)$

Rešitev.

✗ (b) $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ in $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$

Rešitev.

✗ (c) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}([A|B])$

Rešitev.

✗ (d) $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

Rešitev.

✗ (e) $\text{rank}([A|B]) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, kjer je za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ matrika $[A|B] \in \mathbb{R}^{m\times(n+p)}$ razširjena matrika matrik A in B.

Rešitev.

✗ (f) $\text{rank}(A \oplus B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, kjer je za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ matrika $\text{rank}(A \oplus B) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)\times(n+q)}$ direktna vsota matrik A in B.

Rešitev.

✗ (g) NALOGA

Rešitev.

✗ 2. Dokažite, da je podobnost matrik tranzitivna lastnost.

Rešitev.

✗ 3. Dokažite, da imajo podobne matrike isti karakteristični polinom.

Rešitev.

✗ 4. Dokažite, da je podobnost matrik tranzitivna lastnost.

Če je $A = P_1BP_1^{-1}$ in $B = P_2CP_2^{-1}$ potem velja: $A = (P_1P_2)C(P_2^{-1}P_1^{-1}) = P_3CP_3^{-1}$

✗ 5. Naj bo $A = PDP^{-1}$ simetrična matrika. Pokažite, da je najboljša aproksimacija ranga 1 matrike A v Frobeniusovi normi enaka $\lambda_1 v_1 v_1^\top$, kjer je λ_1 po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike A, v_1 pa normirani lastni vektor, ki pripada λ_1

Rešitev.

✗ 6. Poiščite linearno spremembo spremenljivk $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ in $w = h(x, y, z)$, v kateri ima $Q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - 4xz - 2yz$ diagonalno obliko.

Rešitev.

✗ 7. Če je simetrična matrika A pozitivno semidefinitna, pokažite, da je tudi A^k pozitivno semidefinitna za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Rešitev.

8. Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$? Za vsak podprostor določite tudi bazo.

✗ (a) Vse matrike D, ki so rešitve sistema $D\vec{x} = 0$. Določite bazo le v posebnem primeru, ko je $n = 2$ in $\vec{x} = [1\ 2]^\top$

Vse matrike D so vektorski podprostor saj velja: $(\alpha D_1 + \beta D_2)\vec{x} = \alpha D_1\vec{x} + \beta D_2\vec{x} = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ Baza danega PP je: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

✗ (b) Vse matrike F, za katere velja $F = F^\top$

Vse matrike F so podprostor: $(\alpha F_1 + \beta F_2) = (\alpha F_1 + \beta F_2)^\top = (\alpha F_1)^\top + (\beta F_2)^\top = \alpha(F_1)^\top + \beta(F_2)^\top$

✗ (c) Vse matrike G, za katere velja $G = -G^\top$

Vse matrike G so podprostor: $(\alpha G_1 + \beta G_2) = -(\alpha G_1 + \beta G_2)^\top = -(\alpha G_1)^\top + -(\beta G_2)^\top = \alpha(-G_1)^\top + \beta(-G_2)^\top$

✗ 9. Naj $C[0, 2\pi]$ označuje vektorski prostor vseh zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$. Pokažite, da so vektorji $f(x) = 1, \quad g(g) = \cos(2x), \quad h(x) = \cos^2(x)$ linearno odvisni v $C[0, 1]$.

$f(x) = 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, $g(x) = \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. $-(\cos^2(x) + \sin^2(x)) + 2\cos^2(x) = -f(x) + 2h(x) = \cos(2x) = g(x)$

TODO: ostal sem pri WS6.pdf

1. IZPIT IZ MATEMATIKE 1
zbirka rešitev

30. januar 2020

1. Če za matriko A velja $A^\top A = A^2$, izračunajte $\operatorname{tr}((A^\top - A)^2)$.

   Predlogi rešitev:

   A.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((A^\top - A)^2) = &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top - A^\top A - AA^\top + A^2) = \underline{\text{P :}}\ \text{tu utemeljite naslednji korak}\\ &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top - A^2) =\\ &= \operatorname{tr}((A^\top)^2) - \operatorname{tr}((A)^2) =\\ &= \operatorname{tr}((A)^2) - \operatorname{tr}((A)^2) = 0\end{aligned}$$

   B.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((A^\top - A)^2) &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top - A^\top A - AA^\top + A^2) =\\ &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top) - \operatorname{tr}(A^\top A) - \operatorname{tr}(AA^\top) + \operatorname{tr}(A^2) =\end{aligned}$$

$\underline{\text{P :}}$ kako ste dobili naslednjo vrstico?

$$\begin{aligned}\text{Not sm ustavu.} &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top) - \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(AA^\top) + \operatorname{tr}(A^2) =\\ &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top) - \operatorname{tr}(AA^\top) =\\ &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top) - \operatorname{tr}(A^\top A) =\\ &= \operatorname{tr}(A^\top A^\top) - \operatorname{tr}(A^2) =\\ &= \operatorname{tr}((A^\top)^2) - \operatorname{tr}(A^2) =\\ &= \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A^2) = 0\end{aligned}$$

   C. ...

1) $A^T A = A^2 \quad tr((A^T - A)^2)$

$tr(A^T A^T - 2A^T A + AA) = tr(A^T A^T) - 2tr(A^2) + tr(A^2) =$

$= tr(A^2) - 2tr(A^2) + tr(A^2) = \underline{\underline{0}}$

2. Če za matriki $A \in \mathbb{R}^{12\times 4}$ in $B \in \mathbb{R}^{3\times 42}$ velja $||A||_F = 5$ in $||B||_F = 3$, izračunajte $||A \otimes B||_F$.

A.

$$||A \otimes B||_F = ||A||_F \cdot ||B||_F = 5 * 3 = 15$$

B.

$$||A \otimes B||_F = \sqrt{\mathrm{tr}((A \otimes B)^T(A \otimes B))}$$

$$= \sqrt{\mathrm{tr}((A^T \otimes B^T)(A \otimes B))}$$

$$= \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A \otimes B^T B)}$$

$$= \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} \cdot \sqrt{\mathrm{tr}(B^T B)}$$

$$= ||A||_F \cdot ||B||_F = 5 * 3 = 15$$

C. ...

2) $||A|| = 5$ $||A \otimes B||^2$

$||B|| = 3$

$\sqrt{\mathrm{tr}(A \cdot A^T)} = \sqrt{\text{vsota kvadratov vseh el.}}$

$(A \otimes I)\cdot(I \otimes B)$ $\quad$ $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

$\sqrt{\mathrm{tr}\left((A\otimes B)(A\otimes B)^T\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left((A\otimes B)(A^T \otimes B^T)\right)} = \mathrm{tr}\left(AA^T \otimes BB^T\right) =$

$= \underbrace{\sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)}}_{||A||} \underbrace{\sqrt{\mathrm{tr}(BB^T)}}_{||B||} = 5 \cdot 3 = 15$

3. Če sta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonalni matriki, dokažite, da je tudi matrika $A \otimes B$ ortogonalna.

A.

$$
\begin{aligned}
(A\otimes B)^{\mathsf{T}}(A\otimes B) &= (A^{\mathsf{T}}\otimes B^{\mathsf{T}})(A\otimes B) = \\
&= ((A^{\mathsf{T}}A)\otimes(B^{\mathsf{T}}B)) = \\
&= I\otimes I = I
\end{aligned}
$$

B.

3) $A\cdot A^T = I$

$\underbrace{B\cdot B^T = I}$

$(A\otimes B)(A\otimes B)^T = I$?

$= (A\otimes B)(A^T\otimes B^T) = A\cdot A^T \otimes B\cdot B^T = I\otimes I = \underline{\underline{I}}$

4. Če je simetrična matrika A pozitivno semidefinitna, pokažite, da je tudi A^k pozitivno semidefinitna.

A. Matrika A ima lastne vrednosi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Ker JE PSD potem vemo, da so $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$. Ko matriko potenciramo, se tudi lastne vrednosti potencirajo. Tako lahko sklepamo: $A^k = \lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$, ker pa trdimo, da so lastne vrednosti ~~pozitivne~~ P: nenegativne **so tudi njihove potence ~~pozitivne~~** P: nenegativne **, tako: $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k \geq 0$.** P: Ker ima A^k nenegativne lastne vrednosti, je PSD.

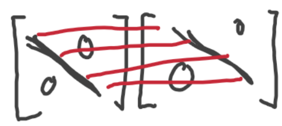
B. ...

4) A je PSD $\quad \boxed{A = QDQ^T}$

A^k je PSD?

$A^k = \underbrace{QD\overset{I}{\underline{Q^TQ}}DQ^T \dots QDQ^T}_{k}$

$A^k = Q\underline{\underline{D^k}}Q^T$ $\qquad$ DDD



$\lambda_1 \dots \lambda_n \geq 0$

$\boxed{\lambda_1^k \dots \lambda_n^k \geq 0}$

5. Ali je množica vseh $n \times n$ simetričnih pozitivno semidefinitnih matrik vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$?

   A. Ne, saj ni zaprta za množenje.
   P: Malce sem obrnila vrstni red argumentov, sicer je bilo OK. **Če je B PSD, potem je $(x^\mathsf{T}Bx) \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$. Kadar je α negativna, je**

$$x^\mathsf{T}(\alpha B)x = \alpha(x^\mathsf{T}Bx) \leq 0$$

   za vse $x \in \mathbb{R}^n$. P: Ali se lahko zgodi, da bi bilo $\alpha(x^\mathsf{T}Bx) = 0$ in $x^\mathsf{T}Bx = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$, vse $\alpha \in \mathbb{R}$? Temu primeru se je potrebno izogniti, zato na začetku izberite tak B, da $x^\mathsf{T}Bx > 0$ za vsaj en $x \in \mathbb{R}$. Potem je argument zgoraj ok.

   B. ...

5) NE, če množiš z neg. številom iz $\mathbb{R}$.

$$-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Naj bodo vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ iz vektorskega prostora $V \subseteq \mathbb{R}^{36}$ z lastnostjo $\dim V = 15$ linearno neodvisni. Ali je $k \leq 15$?

   A. Da. Ker je $\dim V = 15$, v V ni več kot 15 linearno neodvisnih vektorjev.

   B. Ne. $\dim V = 15$ nam pove le to, da ne obstaja množica linearno neodvisnih vektorjev z močjo < 15, ki bi napenjala prostor. Linearno neodvisnih vektorjev je lahko tudi več kot 15. ? (naj popravi kdo če se motim) P: To ne bo res. V prostoru dimenzije n ne morete najti več kot n linearno neodvisnih vektorjev. Predstavljajte si, da je $n = 3$. Ali lahko v $\mathbb{R}^3$ najdete 4 linearno neodvisne lastne vektorje?

   C. Kaj nam v tem primeru pove 36 v R^{36}? Ni ponavadi tako, da je $dimV = n$, če mamo $V \subseteq R^n$? In potem je v tem primeru 36 brez pomena?

   D. ...

6) DA, če bi dodajali vektorje bi bili lin. odvisni.

7. Dokažite, da je v jedru linearne preslikave $\tau : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}_4[x]$ vsaj ena neničelna matrika.

   A. Vemo, da je $\dim \mathbb{R}^{2\times 3} = 2 \times 3 = 6$ in $\dim \mathbb{R}_4[x] = 5$. Sledi $\dim \mathbb{R}^{2\times 3} = \dim \ker(\tau) + \dim \mathbb{R}_4[x]$ P: Tole ni res. Bilo bi, če bi bila preslikava surjektivna, a o tem ne vemo ničesar. Velja pa $\dim \mathbb{R}^{2\times 3} = \dim \ker(\tau) + \dim \operatorname{im}(\tau) \leq \dim \ker(\tau) + \dim \mathbb{R}_4[x]$. Sedaj ustrezno popravite od tu dalje.
   sledi $\dim(\ker(\tau) \geq \dim \mathbb{R}^{2\times 3} - \dim \mathbb{R}_4[x] \geq 6 - 5 \geq 1$ Kar pomeni da je vsaj ena neničelna matrika

   B. Preslikava preslika iz prostora z dimenzijo 6 v prostor z dimenzijo 5, 1 dimenzije se moramo znebiti P: natančneje! , torej mora preslikava preslikat za P: vsaj 1 dimenzijo matrik v 0.

   C. ...

7) $\boxed{Ax=0}$

$T(x)=0$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

$$\boxed{N(A)+C(A)=n}$$

$$\begin{array}{c} E_{11} \; \cdots \; E_{23} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot x \\ \cdot x^2 \\ \cdot x^3 \\ \cdot x^4 \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{5}$

$C(A)=5 \quad n=6$

$\boxed{N(A)=1}$ je vsaj 1.

8. Zapišite primer linearne izometrije $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ima lastno vrednost različno od 1 in -1.

   A. Rotacija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

   P: Zapišite bolj natančno. Dopišite, za kateri kot.
   Ali pride tu v poštev katerikoli koli kot, da je zadoščeno poguju $\cos\phi + i\sin\phi \neq +-1$ in $\cos\phi - i\sin\phi \neq +-1$ iz česar sledi da $\phi \neq \frac{\phi}{4}$ P : $\pi?, 0$

   B. Rotacija:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 42^\circ & -\sin 42^\circ \\ 0 & \sin 42^\circ & \cos 42^\circ \end{bmatrix}$$

   C. ...

9. Zamenjajte vrstni red integracije:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)dy \right) dx$$

A.

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)dy \right) dx$$

P: Manjka slika ali kakšen drug argument.

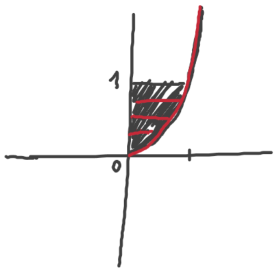
B. ...

9) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy$

$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)\, dy \right) dx$

$x = \sqrt{y}$

$y = x^2$



10. Ali obstaja takšna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$

in ima v točki $(x, y) = (0, 0)$

(a) lokalni minumum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

A. Da, saj so drugi odvodi večji od nič. P: Manjka utemeljitev. $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ = $\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 1 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$ sledi, da sta lastni vrednosti enaki $\lambda_1 = 6$ in $\lambda_2 = 1$

B. Iz navodil lahko zapišemo H_fP : $(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ker so glavne pod-determinante pozitivne, vemo, da ima ta matrika vse lastne vrednosti večje od nič. Iz te P: katera je "ta"? :) trditve pa vemo, da da ima funkcija v točki $(0,0)$ lokalni minimum. P: Manjka še en pogoj, da bo res imela lokalni minimum. Primer funkcije: $2x^2 + xy + y^2$ P: Lahko napišete zgolj ta primer, brez utemeljitve zgoraj. Sedaj samo preverite, da veljajo vsi potrebni pogoji, da bo res imeli minimum v $(0,0)$.

(b) lokalni maksimum? (Če da, zapišite primer. Če ne, razložite, zakaj ne.)

A. Ne, saj sta druga odvoda pozitivna. P: Manjka utemeljitev. in pa kot razvidno iz točke a sta obe lastni vrednosti Hessejeve matrike pozitivni

B. Iz navodil lahko zapišemo H_fP : $(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ker so glavne poddeterminante pozitivne, vemo, da ima ta matrika vse lastne vrednosti večje od nič. Iz te trditve pa vemo, da ima funkcija pri tej točki minimum P: spet, kot prej, manjka en pogoj , zato lokalnega maksimuma v tej točki ni. P: Dovolj bi bilo, da rečete naslednje: Če bi imela f lokalni maksimum, potem bi morale bili lastne vrednosti $H_f(0,0)$ ... in zato ...

10) T(0,0)

$H = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ PD $\to$ T(0,0) je MIN

$f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$

$f_x = 4x + y$
$f_y = 2y + x$

$f_{xx} = 4$ $f_{xy} = 1$
$f_{yy} = 2$ $f_{yx} = 1$

11. Naj bodo (u, v, w) nove koordinate v $\mathbb{R}^3$, definirane s predpisom

$$x = u\cos v, y = 2u\sin v, z = 3w.$$

kjer je $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ in $w \in \mathbb{R}$. Izračunajte determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

A.

$$\underline{\text{P}:}\ \det\begin{bmatrix}\cos v & -u\sin v & 0\\ 2\sin v & 2u\cos v & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = 3 * \underline{\text{P}:}\ \det\begin{bmatrix}\cos v & -u\sin v\\ 2\sin v & 2u\cos v\end{bmatrix} =$$

$$= 3(\cos v * 2u\cos v + u\sin v * 2\sin v) =$$

$$= 3(2u\cos v^2 + 2u\sin v^2) =$$

$$= 6u(\cos v^2 + \sin v^2) = 6u$$

B. ...

11)*

$x = u\cos v$

$y = 2u\sin v$

$z = 3w$

$$J = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} \cos v & -u\sin v & 0 \\ 2\sin v & 2u\cos v & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$3\cdot(\cos v\cdot 2u\cos v + u\sin v\cdot 2\sin v)$$

$$3\cdot(2u(1)) = \underline{\underline{6u}}$$

12. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika z lastnostjo $A^\mathsf{T} = -A$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right)$.

A.

$$\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\left(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} + ||5\vec{x}||^2\right) = \frac{\partial}{\partial\vec{x}}(\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial\vec{x}}(||5\vec{x}||^2) =$$

$$= x^\mathsf{T}(A + A^\mathsf{T}) + 10\vec{x}^\mathsf{T} =$$

$$= x^\mathsf{T}(A - A) + 10\vec{x}^\mathsf{T} =$$

$$= x^\mathsf{T}(0) + 10\vec{x}^\mathsf{T} = 10\vec{x}^\mathsf{T}$$

B. ...

12) $A^T = -A$ $\quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\underline{\vec{x}^T A x} + \underline{||5\vec{x}||^2}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{2\vec{x}^T(A+A^T)}_{0} + 2\cdot 5\vec{x}^T\cdot 5 = \underline{\underline{50\vec{x}^T}}$$

13. Denimo, da funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ doseže maksimalno vrednost na krivulji $x^2 + 2y^2 = 3$ v točki $(1,1)$. Ali sta $(\mathrm{grad} f)(1,1)$ in $[1,2]^\mathsf{T}$ linearno odvisna?

A. $(\mathrm{grad} f)(1,1)$ = $[2,4]^\mathsf{T}$ P: To je potrebno utemeljiti. , kar pomenim da sta $(\mathrm{grad} f)(1,1)$ in $[1,2]^\mathsf{T}$ linearno odvisna saj lahko enega izrazimo z drugim.
$(\mathrm{grad} f)(1,1)$ = $[\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}]^\mathsf{T}$ =[2x, 4y]$^\mathsf{T}$ $= [2,4]^\mathsf{T}$, sledi $\frac{1}{2}[2,4]^\mathsf{T} = [1,2]^\mathsf{T}$

B. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$
P: Zakaj bi ti dve vrstici držali?
$(\mathrm{grad} f) = [2x, 4y]^\mathsf{T}$ P: Natanko to je potrebno utemeljiti.
Iz tega sledi, da je $(\mathrm{grad} f)(1,1) = [2,4]^\mathsf{T}$.
Kot lahko vidimo, je $\frac{1}{2}(\mathrm{grad} f)(1,1) = [1,2]^\mathsf{T}$ zato lahko sklepamo, da sta linearno odvisna, saj je en vektor mogoče izraziti z drugim.

C. $g(x,y) = x^2 + 2y^2 = 3$
Če je v (1,1) maksimum, potem velja $(\mathrm{grad} f)(1,1) = \lambda(\mathrm{grad} g)(1,1)$
$\lambda(\mathrm{grad} g)(1,1) = \lambda[2,4]^\mathsf{T}$
$\lambda[2,4]^\mathsf{T} = [1,2]^\mathsf{T}$
$\lambda = 2$

D. ...

13) $x^2 + 2y^2 = 3$

$$\mathrm{grad} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 4y \end{bmatrix}(1,1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{sta lin. odvisna}}$$

14. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad & x + y^2 + z^2 \\ \text{pri pogojih} \quad & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

A. Ker je

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (x + y^2 + z^2) - \lambda_1(x^2 + 2y^2 - 4) - \lambda_2(x + y + z - 1),$$

so KKT naslednji:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda_1 2x - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 4y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_2 = 0$$ P : Pravilno odvajajte.

$$\lambda_1(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$$

$$\lambda_1 \leq 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$$

$x + y + z - 1 = 0$ P : eden od teh dveh ni pravi. Kateri?

B. Ker je

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (x + y^2 + z^2) - \lambda_1(x^2 + 2y^2 - 4) - \lambda_2(x + y + z - 1),$$

so KKT naslednji:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 4\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$$

$$\lambda_1 \leq 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$$

$$x + y + z = 1$$

14) minimiziraj $x^2 + y^2 + z^2$

pri pogojih $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

$x + y + z = 1$

1) $x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$ .... $\underline{\underline{g_i(x) \leq 0}}$

2) $x + y + z - 1 = 0$ $\quad \underline{\underline{h_j(x) = 0}}$

3) $\underline{\underline{\lambda \leq 0}}$

4) $\lambda(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$

$L(x, y, z, \lambda, \mu) =$

$= x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 4)$

$- \mu(x + y + z - 1)$

5) $L_x = 0, L_y = 0$ $\quad L_x = 2x - \lambda 2x - \mu = 0$

$L_y = 2y - \lambda 4y - \mu = 0$

$L_z = 2z - \mu = 0$

2. IZPIT IZ MATEMATIKE 1
zbirka rešitev

13. februar 2020

1. Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lastne vrednosti 1, 2, 3 in matrika $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lastne vrednosti -1, -2 in -3. Zapišite vse lastne vrednosti matrike $A \otimes B$.

    A. $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -2, \lambda_{4,5} = -3, \lambda_6 = -4, \lambda_{7,8} = -6, \lambda_9 = -9$ P: samo malce utemeljite... **Lastne vrednosti kronekerjevega produkta $A \otimes B$ so enake produktu lastnih vrednosti matrike A in B. Torej: Če so $\lambda_{B1}, ...\lambda_{Bn}$ lastni vrednosti matrike B in $\lambda_{A1}, ...\lambda_{An}$ lastne vrednosti matrike A potem so lastne vrednosti kronekerjevega proukta enake:** $\lambda_{B1}\lambda_{A1}, \lambda_{B2}\lambda_{A1}, ...\lambda_{Bn}\lambda_{A1}, \lambda_{B1}\lambda_{A2}...$

1)

	-1	-2	-3
1	-1	-2	-3
2	-2	-4	-6
3	-3	-6	-9

2. Naj bo $A = B^\mathsf{T} B$ takšna pozitivno semidefinitna matrika velikosti $n \times n$, da za nek vektor $x \in \mathbb{R}^n$ velja $x^\mathsf{T} A x = 0$.

    Pokažite, da je $Bx = 0$ in nato sklepajte, da velja tudi $Ax = 0$.

    A. $x^\mathsf{T} A x = 0 = x^\mathsf{T} B^\mathsf{T} B x = (Bx)^\mathsf{T}(Bx) = ||Bx||^2 \underline{\geq 0}$

    $||Bx||^2 = 0$ sledi $Bx = 0$

    Ker vemo, da $B^2 = A$ sledi $Ax = 0$. P: Tole pa potrebuje utemeljitev, ne?

    če je A PSD se izkaže, da obstaja natanko ena PSD, da velja A = B^2

    B.

2) $\overset{PSD}{A} = B^T B$

$\underline{x^T A x = 0} \ldots$

$\boxed{Bx = 0 \longrightarrow Ax = 0}$

$x^T B^T B x = 0$

$(Bx)^T Bx = ||Bx||^2 = 0$

Bx je ničelni vektor

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B^T \underbrace{Bx}_{0} = 0$

3. Ali je množica vseh matrik $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$ ranga 2 vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times3}$?

A. Ne saj ni zaprta za seštevanje. Protiprimer:
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\1 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 5 & 5\\5 & 5 & 5\end{bmatrix}$$

B. rang(A+B) $\leq$ rangA + rangB = 4, kar ni enako 2 in pomeni da ni vektorski podprostor P: Če velja neenakost, še ne pomeni, da je kdaj dosežena enakost, torej zgornja meja.
$rang(\alpha A) = \alpha rang A = \alpha 2$, v primeru, ko je α različen od 1 ni več zaprto za množenje?

C. Ne, ker ima ničelna matrika rang 0, sepravi ni član množice matrik $\mathbb{R}^{2\times3}$ ranga 2?

3) $\begin{bmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{bmatrix}$ rang = 2

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad r=1$$

ne, ker nima ničelne matrike

4. Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\tau\colon V \to V$. Če je $u+v$ tudi lastni vektor za τ, potem pokažite, da u in v pripadata isti lastni vrednosti.

A. $\tau(v) = \lambda_1 v$
$\tau(u) = \lambda_2 u$
$\tau(u+v) = \lambda_3(u+v)$ Iz tega lahko napišemo: $\tau(u) + \tau(v) = \lambda_3 u + \lambda_3 v$
$\lambda_1 v + \lambda_2 u = \lambda_3 u + \lambda_3 v$
$u(\lambda_3 - \lambda_2) + v(\lambda_3 - \lambda_2) = 0$
Rešitev: $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$

4) $Tu = \lambda u$
$Tv = \mu v$

$Tu + Tv = \lambda u + \mu v$
$T(u+v) = \underline{\lambda u + \mu v = \alpha u + \alpha v}$

$\underline{\underline{T(u+v) = \alpha(u+v)}}$

$\lambda u - \alpha u = \alpha v - \mu v$
$u\underbrace{(\lambda - \alpha)}_{0} = v\underbrace{(\alpha - \mu)}_{0}$
$\lambda = \alpha \qquad \mu = \alpha$
$\underline{\lambda = \mu}$

5. Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\tau(A) = \mathrm{tr}(A)$.

(a.) Pokažite, da je τ linearna.

A. $\tau(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B) = \alpha\tau(A) + \beta\tau(B)$

B. $\tau(A + B) = tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = \tau(A) + \tau(B)$
$\tau(\alpha A) = tr(\alpha A) = \alpha tr(A) = \alpha\tau(A)$

(b.) Zapišite matriko, ki pripada τ v standardnih bazah $\mathbb{R}^{3\times3}$ in $\mathbb{R}$.

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ P: dodajte razlago.

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ P: Najprej razmislite, kako velika mora biti matrika.

(c.) Katere od naslednjih matrik ležijo v jedru $\ker\tau$?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{2021}$

(c) Poljubna 3×3 matrika z lastnimi vrednostmi 1, 0 in -1

A. c, saj je tr(M) = 0 P: Malo še razložite, da imajo podobne matrike isto sled. Morda še katera od preostalih? Lahko zapišemo $B = P^{-1}AP$, kjer P predstavlja matriko z lastnimi vrenodstmi 1, 0 in -1. Tako lahko ustvarimo podobne matrike, ki imajo iste lastne vrednosti in isto sled matrike.

5)
a) $\tau(A) = tr(A)$

$\tau(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A) + tr(\beta B) =$

$= \alpha tr(A) + \beta tr(B) = \underline{\underline{\alpha\tau(A) + \beta\tau(B)}}$

b) $\tau(E_{11})$ $\tau(E_{22})$ $\tau(E_{333})$
$[\ 1..000\ 1\ 00..1\ ]$ $\mathbb{R}$

c) $[\quad]$ $[\quad]$ $= 0$

a) $\tau(A) = 0 = tr(A)$ //
b) //
c) ✓ ker je tr enak vsoti l. vrednosti.

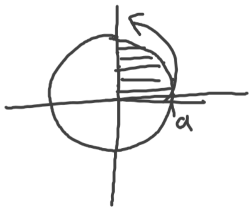
6. Zapišite primer izometrije $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki ni identiteta, vendar pa je $\mathcal{A}^3$ identična preslikava.

A. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ P: Je $A^3 = I$?

B. zrcaljenje čez ravnino, skozi koordinatno izhodišče $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ P: Je $B^3 = I$?

C. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(120) & -sin(120) \\ 0 & sin(120) & cos(120) \end{bmatrix}$ rotacija za 120 stopinj

6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$



7. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ neničelno število. Za pišite naslednji integral s spremembo v polarni koordinatni sistem

$$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

A. Iz zgornjega integrala lahko izberemo radij krožnice, $r = a$, in pa to, da računamo ploščino krožnice P: kroga v prvem kvadrantu. Zato:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a f(x,y) * r dr \right) d\theta.$$

B.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) * r dr \right) d\theta.$$

7) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(xy)\, dx \right) dy = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^a}_{} \frac{f(x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi)\cdot r}{f(r,\varphi)\cdot r} dr \right) d\varphi$

8. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija treh spremeljivk. Za vsako od točk $P, R \in \mathbb{R}^3$ določite in utemeljite, ali sta lokalni minimum, lokalni maksimum, ali nista ekstremalni točki ali pa iz danih podatkov ne moremo ugotoviti, katerega tipa sta točki.

(a.) $f_x(P) = f_y(P) = f_z(P) = 0,\ f_{xx}(P) = 3, f_{yy}(P) = -1, f_{xy}(P) = 0.$

A. Je stacionarna točka, saj sta prva odvoda enaka nič, vendar pa ima Hessejeva matrika pozitivne in negativne lastne vrednosti, tako da lokalnega extream v točko P ni.

B. ker so prvi odvodi enaki nič pomeni, da je stacionarna točka. Iz Hessejeve matrike pa vidimo, da ni ekstremov, saj je ena lstna vrednost pozitivna, druga pa negativna $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

(b.) $f_x(R) = f_y(R) = f_z(R) = 1,\ f_{xx}(R) = f_{yy}(R) = f_{zz}(R) = 1, f_{xy}(R) = f_{yz}(R) = f_{xz}(R) = 0.$

A. Ni stacionarna točka, saj prva odvoda nista enaka nič

8)
$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ND} = \text{sedlo}$$

9. Naj bo (u, v) novi koordinatni sistem v $\mathbb{R}^2$, definiran z

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v,$$

kjer $u \in \mathbb{R}$ and $v \in [0, 2\pi]$. Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

A. $\det \begin{bmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{bmatrix} = e^{2u} cos^2 v + e^{2u} sin^2 v = e^{2u}(cos^2 v + sin^2 v) = e^{2u}$

9) $x = e^u \cos v$

$y = e^u \sin v$

$$J = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} e^u \cos v & -\sin v e^u \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{bmatrix} \end{array}$$

$$e^{u^2} \cos^2 v + e^{u^2} \sin^2 v = \underline{\underline{(e^u)^2}}$$

10. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ izračunajte $\frac{\partial ||A\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}}$.

A. $2(A\vec{x})^\mathsf{T}A = 2\vec{x}^\mathsf{T}A^\mathsf{T}A$

10) $\frac{\partial ||A\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}} = 2\cdot(A\vec{x})^\mathsf{T}\cdot A$

11. Ali je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podana s predpisom $f(x, y) = \log x - e^y$, konveksna?

A. $f_x = \frac{1}{x}$
$f_y = -e^y$
$H_f = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{x^2}) & 0 \\ 0 & -(e^y) \end{bmatrix}$ **Za vse** $x, y \in \mathbb{R}$ **vidimo, da so lastne vrednosti** $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ P: , torej...

B. Ker so vse lastne vrednost H_f manjše od 0 je matrika negativno definitna in zato je konkavna

11) $f(x,y) = \log x - e^y$

$f_x = \frac{1}{x}$

$f_y = -e^y$

$$\begin{array}{cc} - & + \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

Neg. def. = KONKAVNA

12. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za naslednji problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z}\ & xyz \\ \text{pri pogojih}\ & x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ & x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

A. Ker je

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + 2y^2 - 1) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 4),$$

so KKT naslednji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2x\lambda_1 - 2x\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= xz - 4y\lambda_1 - 2y\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= xy = 0 \\ \lambda_1(x^2 + 2y^2 - 1) &= 0 \\ \lambda_1 &\leq 0 \\ x^2 + 2y^2 &\leq 1 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

12)

xyz

$x^2+2y^2 \leqslant 1$

$x^2+y^2=4$

1) $x^2+2y^2-1 \leqslant 0$

2) $x^2+y^2-4=0$

3) $\lambda \leqslant 0$

4) $\lambda(x^2+2y^2-1)=0$

5) $L_x=0 \quad L_x = yz - \lambda 2x - 2\mu x = 0$

$L_y = 0 \quad L_y = xz - 4\lambda y - 2\mu y = 0$

$L_z = 0 \quad L_z = xy = 0$

$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xyz - \lambda(x^2+2y^2-1) - \mu(x^2+y^2-4)$

3. IZPIT IZ MATEMATIKE 1
zbirka rešitev

17. avgust 2020

1. Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^n$ poljubna vektorja in definirajmo $A = xy^T$.

   A. (10 točk) Pokažite, da je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika s sledjo x^Ty.

Sled matrike $A = xy^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lahko denimo poračunamo kot

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(xy^T) \quad \text{(po definiciji matrike } A\text{)}\\
&= \mathrm{tr}(y^Tx) \quad \text{(simetričnost sledi)}\\
&= \mathrm{tr}(x^Ty) \quad \text{(simetričnost skalarnega produkta)}\\
&= x^Ty \ (x^Ty \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Seveda se lahko razpi?emo tudi po komponentah. Če označimo $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ in $y = [y_1 \ldots y_n]^T$, potem je matrika A oblike

$$A = xy^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1}$$

in tako je $\mathrm{tr}(A) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n = x^Ty$.
(Opomba pri točkovanju: Za $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(x^Ty)$ ste dobili 7.5 točke.)

   B. (10 točk) Pokažite, da ima A lastni vrednosti 0 (z večkratnostjo $n-1$) in x^Ty (z večkratnostjo 1).

Iz (1) je očitno, da je $\mathrm{rang}(A) = 1$. To lahko vidite tudi tako, da napišete $A = [y_1x \ y_2x \ \ldots \ y_nx]$, torej so vsi stolpci matrike A večkratniki vektorja x.
Sledi, da je $\dim N(A) = n-1$, torej je 0 lastna vrednost matrike A in njej pripadajoči lastni podprostor je dimenzije $n-1$. Če označimo lastne vrednosti matrike A z $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je torej $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Torej ima matrika A le eno neničelno lastno vrednost λ_n, ki jo lahko izračunamo denimo kot

$$x^Ty = \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \lambda_n.$$

1) a) $A = xy^T \longrightarrow tr = \underbrace{x_1y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n}$

$tr(A) = x^Ty$

$\boxed{tr(A) = tr(A^T)}$

$tr(\underbrace{xy^T}_{n\times n}) = tr(\underbrace{y^Tx}_{1\times 1}) = y^Tx = x^Ty$

b) $\begin{bmatrix} x_1y_1 & \ldots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix}$

rang = 1

$N(A) = n-1$

x^Ty je zadnja l. vrednost ker mora biti $tr(A) = x^Ty$

2. (10 točk) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pozitivno semidefinitni matriki. Pokažite, da je tedaj tudi $A \otimes B$ pozitivno semidefinitna.

Ker je matrika A PSD, ima n nenegativnih lastnih vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_i \geq 0$. Ker je tudi B PSD, ima m nenegativnih lastnih vrednosti $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $\mu_j \geq 0$. Vemo, da so lastne vrednosti matrike $A \otimes B$ natanko vsi možni produkti $\lambda_i \mu_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, zatorej tudi nenegativna števila. Sledi, da je matrika $A \otimes B$ PSD.
(Opomba pri točkovanju: pazite, lastne vrednosti niso nujno pozitivne, lahko so tudi 0. In nikakor **ne** velja $x^T(A \otimes B)x = x^T A x + x^T B x$.)

2) $A = PSD \quad \lambda_i \geqslant 0$

$B = PSD \quad \mu_j \geqslant 0$

$A \circ B \quad \lambda_i \cdot \mu_j \geqslant 0$ PSD

3. Definirajmo preslikavo $\tau : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ s predpisom $\tau(p(x)) = x^2 p'(x)$.

A. (10 točk) Pokažite, da je τ linearna.

Izberimo $p, q \in \mathbb{R}_1[x]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poračunajmo

$$\begin{aligned}\tau((\alpha p + \beta q)(x)) &= x^2((\alpha p(x) + \beta q(x))') = \\ &= x^2(\alpha p'(x) + \beta q'(x)) = \\ &= \alpha x^2 p'(x) + \beta x^2 q'(x) = \\ &= \alpha\tau(p(x)) + \beta\tau(q(x)),\end{aligned}$$

iz česar sledi, da je τ linearna.

B. (10 točk) Zapišite matriko, ki ustreza preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$.

Standardna baza $\mathbb{R}_1[x]$ je enaka $\{1, x\}$, standardna baza $\mathbb{R}_2[x]$ pa $\{1, x, x^2\}$. Ker je

$$\tau(1) = x^2 \cdot 1' = 0 \text{ in } \tau(x) = x^2 \cdot x' = x^2,$$

je matrika T, ki pripada preslikavi τ v standardnih bazah $\mathbb{R}_1[x]$ in $\mathbb{R}_2[x]$ enaka

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Opomba pri točkovanju: Seveda ste lahko standardni bazi izbrali v drugem vrstnem redu. V tem primeru ste dobili matriko s spermutiranimi vrsticami in stolpci.
Za pravilno izračunane slike $\tau(1)$ in $\tau(x)$ ste dobili 2.5 točke.)

C. (10 točk) Kateri od naslednjih polinomov so v $\ker\tau$?

(a) $3x$ (b) 5 (c) 0

V jedru preslikave τ bodo natanko tisti polinomi $p \in \mathbb{R}_1[x]$, za katere je $p'(x) = 0$, torej konstantni polinomi. Ne pa tisti, ki imajo neničelni koeficient pred linearnim členom. Pravilna sta torej odgovora (b) in (c).
Seveda lahko tudi za vsakega od polinomov poračunate slike: $\tau(3x) = 3x^2$, $\tau(5) = \tau(0) = 0$.
(Opomba pri točkovanju: V kolikor ste utemeljili le rezultata pri (b) in (c), ne pa pri (a), ste dobili 7.5 točk. V kolikor ste napisali, da je 0 v jedru, saj je to lastnost vsake linearne preslikave (niste pa utemeljili (a) in (b)), ste dobili 2.5 točke.)

3)
a) $\tau(p(x)) = x^2 p'(x)$

$\tau(\alpha p(x) + \beta g(x)) = x^2 (\alpha p(x) + \beta g(x))' =$

$= x^2(\alpha p'(x) + \beta g'(x)) = \alpha x^2 p'(x) + \beta x^2 g'(x) =$

$= \alpha\tau(p(x)) + \beta\tau(g(x))$

b)
$$\begin{array}{cc} 1 & x \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$$

$\boxed{\begin{array}{l} x^2 1' = 0 \\ x^2 \cdot x' = x^2 \end{array}}$

c)
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad // \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B, C sta v ker.

4. (10 točk) Izračunajte enačbo tangentne ravnine na graf funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$ v točki $(1,1,0)$.

Ker je $f_x(1,1) = 2$, $f_y(1,1) = -2$ in ravnina poteka skozi točko $(1,1,0)$, je enačba tangente ravnine enaka

$$-2x + 2y + z = 0.$$

(Točkovanje: Za izračun gradienta funkcije f 2.5 točke.)

4) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad T(1,1,0)$

$f_x = 2x$
$f_y = -2y$

$$\begin{bmatrix} 2x \\ -2y \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1,1,0)} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{2x - 2y - 1z = 0}}$

$f(x,y) = z$

$f(x,y) - z = 0$
$f_z = -1$

5. (10 točk) Zapišite integral

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2)dz\right)dy\right)dx$$

v cilindričnih koordinatah.

V besedilu je bila napaka, morali bi se ukvarjati z integralom

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2)dz\right)dx\right)dy$$

(Opomba pri točkovanju: Pri tej nalogi ste vsi dobili 10 točk.)

5) $$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)dz\right)dx\right)dy$$

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{r}^{1} r^3 \, dz\right) dr\right) d\varphi$$

6. (10 točk) Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = 3ue^v, y = 2we^u, z = u.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

Jacobijeva matrika je enaka

$$J = J_{u,v,w} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{bmatrix} 3e^v & 3ue^v & 0 \\ 2we^u & 0 & 2e^u \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zatorej je njena determinanta enaka $\det J = 6ue^{u+v}$.
(Točkovanje: V kolikor ste pravilno izračunali le Jacobijevo matriko, ste dobili 5 točk. Nisem vam odbijala točk, če ste Jacobijevo matriko zapisali kot J^T, saj nekateri tudi to vzamejo za definicijo.)

6) $x = 3ue^v$

$y = 2we^u$

$z = u$

$$J = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3e^v & 3ue^v & 0 \\ 2we^u & 0 & 2e^u \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} 3e^v & 3ue^v \\ 2we^u & 0 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$$= \det(J) = \underline{\underline{6ue^v e^u}}$$

7. (10 točk) Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje za naslednji problem

$$\begin{aligned} \text{minimizirajte}_{x,y,z}\ & 2x + 2y^2 + xz \\ \text{pri pogojih}\ & x^2 + y^2 = 1 \\ & x + z = 0 \\ & xy \geq 0 \end{aligned}$$

Ker je

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = 2x + 2y^2 + xz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) - \lambda_2(x + z) - \mu(-xy),$$

so KKT naslednji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2 + z - 2x\lambda_1 - \lambda_2 + \mu y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4y - 2y\lambda_1 + \mu x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= x - \lambda_2 = 0 \\ \mu &\leq 0 \\ \mu(xy) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ x + z &= 0 \\ xy &\geq 0 \end{aligned}$$

(Točkovanje: V kolikor ste napisali v funkciji L zadnji člen kot $-\mu(xy)$, sem vam odbila 2.5 točke. Če vam v prvih treh enakostih manjka $= 0$, sem vam odbila 2.5 točke. Če imate napačnega enega od pogojev $\mu(xy) = 0$ ali $\mu \leq 0$, sem vam odbila 2.5 točke.)

7) $f = 2x + 2y^2 + xz$

POGOJI: $x^2 + y^2 = 1$

$x + z = 0$

$xy \geq 0$

1) $0 \geq -xz$

2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x + z = 0$

3) $\alpha \leq 0$

4) $\alpha(-xy) = 0$

5) $L_x = 2 + z - \lambda 2x - \mu + \alpha y = 0$

$L(x, y, z, \lambda, \mu, \alpha) = 2x + 2y^2 + xz - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + z) - \alpha(-xy)$

5) $L_y = \underset{=0}{4y} - 2\lambda y + \alpha x$, $L_z = x - \mu = 0$

Teoretični izpiti 2021

6 Izpit 22. 1. 2021

6.1 Matrike

? 1. Naj bo $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^n$ in A takšna realna $n \times n$ matrika, da je tudi $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^n$. Pokažite, da je A ortogonalna matrika.

$$
\begin{aligned}
&V = \begin{bmatrix} v_1, \dots, v_n \end{bmatrix} \Rightarrow V^\top V = I \\
&AV = \begin{bmatrix} Av_1, \dots, Av_n \end{bmatrix} \Rightarrow (AV)^\top (AV) = I \\
&V^\top A^\top AV = I \\
&V^\top A^\top AVV^\top = IV^\top \\
&VV^\top A^\top AVV^\top = VIV^\top \\
&IA^\top AI = VV^\top \\
&A^\top A = I \Rightarrow A \text{ je ortogonalna}
\end{aligned}
$$

? 2. Izračunajte lastne vrednosti ortogonalne antisimetrične matrike (A je antisimetrična, če je $A^\top = -A$).

$$
\begin{aligned}
&AA^\top = I,\ -A^2 = I,\ Av = \lambda v \\
&A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow -Iv = \lambda^2 v \\
&\Rightarrow -v = \lambda^2 v \Rightarrow -1 = \lambda^2 \\
&\Rightarrow \lambda = \pm i
\end{aligned}
$$

? 3. Naj $n \times n$ matrikama A in B po Schurovovem izreku pripada ista ortogonalna matrika U, s pomočjo katere sta A in B podobni zgornje trikotnima matrikama. Pokažite, da je vsaka lastna vrednost matrike $A+B$ oblike $\lambda+\mu$, kjer je λ lastna vrednost matrike A, μ pa lastna vrednost matrike B.

$$
\begin{aligned}
&A = UZ_AU^\top,\ B = UZ_AU^\top \\
&A + B = UZ_AU^\top + UZ_BU^\top = U(Z_A + Z_B)U^\top
\end{aligned}
$$

Matrika $Z_A + Z_B$ ima na diagonali vsote istoležnih elementov z diagonal Z_A in Z_B. Ker so na diagonali Z_A lastne vrednosti A in na diagonali Z_B lastne vrednosti B, so na diagonali $Z_A + Z_B$ vsote lastnih vrednosti A in B. $A + B$ je podobna matriki $Z_A + Z_B$ (kar sledi iz zgornjega računa), zato imata enake lastne vrednosti, kar pomeni, da ima $A + B$ lastne vrednosti enake vsotam lastnih vrednosti A in B.

? 4. Naj $n \times n$ matrikama A in B po Schurovovem izreku pripada ista ortogonalna matrika U, s pomočjo katere sta A in B podobni zgornje trikotnima matrikama.

Pokažite, da je vsaka lastna vrednost matrike AB oblike $\lambda\mu$, kjer je λ lastna vrednost matrike A, μ pa lastna vrednost matrike B.

$$A = UZ_AU^\top, \; B = UZ_AU^\top$$
$$A \cdot B = UZ_AU^\top \cdot UZ_BU^\top = U(Z_A \cdot Z_B)U^\top$$

Matrika $Z_A \cdot Z_B$ ima na diagonali produkte istoležnih elementov z diagonal Z_A in Z_B. Ker so na diagonali Z_A lastne vrednosti A in na diagonali Z_B lastne vrednosti B, so na diagonali $Z_A \cdot Z_B$ produkti lastnih vrednosti A in B. $A \cdot B$ je podobna matriki $Z_A \cdot Z_B$ (kar sledi iz zgornjega računa), zato imata enake lastne vrednosti, kar pomeni, da ima $A \cdot B$ lastne vrednosti enake produktom lastnih vrednosti A in B.

6.2 Vektorski podprostori

? 1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Ali je množica

$$\left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \left\|AXA^{-1}\right\|_F \leq 2\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$? (Dokažite svoj odgovor!)

$$\begin{aligned}\alpha X : \left\|A\alpha XA^{-1}\right\|_F &= \sqrt{\operatorname{tr}\left((A\alpha XA^{-1})^\top(A\alpha XA^{-1})\right)}\\ &= \sqrt{\alpha^2 \operatorname{tr}\left((AXA^{-1})^\top(AXA^{-1})\right)}\\ &= \alpha\left\|AXA^{-1}\right\|_F\end{aligned}$$

$\alpha \|AXA^{-1}\|_F$ ni ≤ 2 za vse $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ množica ni vektorski podprostor, ker ni zaprta za množenje s skalarjem

? 2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Ali je množica

$$\left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : AXA^{-1} \text{ je pozitivno semidefinitna matrika}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$? (Dokažite svoj odgovor!)

Iz Schurovega izreka sledi, da se pri množenju matrike s skalarjem z njim pomnožijo tudi lastne vrednosti. Matrika je PSD $\Leftrightarrow$ lastne vrednosti ≥ 0. Če PSD matriko pomnožimo z negativnim skalarjem, bodo vse pozitivne lastne vrednosti postale negativne in zato matrika postane NSD. To pomeni da množica ni zaprta za množenje s skalarjem, zato ni vektorski podprostor.

alternativa 1:

X in AXA^{-1} sta si podobni, zato imata enake lastne vrednosti (λ_i)
AXA^{-1} je $PSD \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \Leftrightarrow X$ je PSD
$\text{trace}(X) = \sum_i \lambda_i \geq 0$
$\text{trace}(\alpha X) = \alpha\, \text{trace}(X)$
za $\alpha < 0\ :\ \text{trace}(\alpha X) \leq 0$
naj bo $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda_i > 0 \Rightarrow Y \in množica$
$\Rightarrow \text{trace}(Y) > 0$
za $\alpha < 0\ :\ \text{trace}(\alpha Y) < 0$
$\Rightarrow Y$ ni PSD

αX ne pripada vedno množici, zato množica ni vektorski podprostor, ker ni zaprta za množenje s skalarjem

alternativa 2:
Naj bo AXA^-1 PSD, ki ima na poziciji (1, 1) pozitivno število. Pri množenju z -1 to število postane negativno, kar pa po Sylvestrovem kriteriju ne more biti PSD. Množica torej ni zaprta za množenje s skalarjem za vse primere, zato množica ni vektorski podprostor.

? 3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Ali je množica

$$\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : AXA^{-1} \text{ je diagonalna matrika}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$? (Svoj odgovor tudi dokažite!)

$$\alpha X + \beta Y :\ A(\alpha X + \beta Y)A^{-1} = \alpha AXA^{-1} + \beta AYA^{-1}$$

AXA^{-1} in AYA^{-1} sta diagonalni
$\Rightarrow$ αAXA^{-1} in βAYA^{-1} sta diagonalni (vrednosti na diagonalah so pomnožene s skalarjem α oz. β)
$\Rightarrow$ $\alpha AXA^{-1} + \beta AYA^{-1}$ je diagonalna (seštejejo se soležne vrednosti matrik αAXA^{-1} in βAYA^{-1})
$\Rightarrow$ množica je vektorski podprostor

? 4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva matrika. Ali je množica

$$\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : AXA^{-1} \text{ je spodnje trikotna matrika}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$? (Svoj odgovor tudi dokažite!)

$$\alpha X + \beta Y : \ A(\alpha X + \beta Y)A^{-1} = \alpha AXA^{-1} + \beta AYA^{-1}$$

AXA^{-1} in AYA^{-1} sta spodnje trikotni matriki
$\Rightarrow \alpha AXA^{-1}$ in βAYA^{-1} sta spodnje trikotni (vrednosti na trikotniku so pomnožene s skalarjem α oz. β)
$\Rightarrow \alpha AXA^{-1} + \beta AYA^{-1}$ je spodnje trikotna (seštejejo se soležne vrednosti matrik αAXA^{-1} in βAYA^{-1})
$\Rightarrow$ množica je vektorski podprostor

6.3 Odvodi vektorskih funkcij

? 1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ter $a \in \mathbb{R}^n$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(x^\top Ax\right)\right)$ in $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\|x\|^2\right)\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos(x^\top Ax)) = -\sin(x^\top Ax)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^\top Ax) = -\sin(x^\top Ax)\cdot x^\top(A + A^\top)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(\|x\|^2\right)\right) = -\sin(||x||^2)\cdot 2x^\top$$

? 2. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Izračunajte $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\|x\|^2}\cos\left(\|Ax\|^2\right)\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\|x\|^2}\cos\left(\|Ax\|^2\right)\right) &= \cos\left(\|Ax\|^2\right)\cdot e^{\|x\|^2}\cdot 2x^\top + e^{\|x\|^2}\cdot\left(-\sin\left(\|Ax\|^2\right)\right)\cdot 2(Ax)^\top\cdot A\\ &= 2e^{\|x\|^2}x^\top\left(\cos\left(\|Ax\|^2\right) - \sin\left(\|Ax\|^2\right)\cdot A^\top A\right)\end{aligned}$$

? 3. Naj bo $a, b \in \mathbb{R}^n$ Izračunajte $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{trace}\left(xa^\top\right)\right)$ in $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{trace}\left(xa^\top\right)\mathrm{trace}\left(xb^\top\right)\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(xy^\top) &= y^\top x = x^\top y\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{trace}\left(xa^\top\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}a^\top x = a^\top\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{trace}\left(xa^\top\right)\mathrm{trace}\left(xb^\top\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}a^\top x\ b^\top x = \frac{\partial}{\partial x}x^\top a\ b^\top x\\ &= x^\top\left((a\ b^\top) + (a\ b^\top)^\top\right) = x^\top\left(a\ b^\top + b\ a^\top\right)\end{aligned}$$

? 4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ter $a \in \mathbb{R}^n$.
Izračunajte $\frac{\partial}{\partial x}(2x-a)^\top A(2x-a)$ in $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x-a)^\top A(2x-a)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(2x-a)^\top A(2x-a) &= (2x-a)^\top(A + A^\top)\cdot 2\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x-a)^\top A(2x-a) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2\ (2x-a)^\top(A+A^\top)\right)^\top\\ &= 2\ \frac{\partial}{\partial x}(A+A^\top)^\top(2x-a)\\ &= 2\ (A+A^\top)^\top\cdot 2 = 4(A+A^\top)^\top\end{aligned}$$

? 5. Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$. Dokažite, da je preslikava $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = x^\top aa^\top x$ konveksna.

$$\frac{\partial}{\partial x}\ x^\top a\ a^\top x = 2x^\top (a\ a^\top)^\top = 2\ x^\top a\ a^\top$$
$$\left(\text{pravilo za odvod kvadratne forme s simetrično matriko: } \frac{\partial x^\top A x}{\partial x} = 2\ x^\top A^\top\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^\top a\ a^\top x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^\top a\ a^\top)^\top = \frac{\partial}{\partial x} 2aa^\top x = 2aa^\top$$
$$x^\top\ (2aa^\top)\ x = 2\ x^\top\ (aa^\top)\ x = 2\ (x^\top a)(a^\top x) = 2\ (a^\top x)^\top (a^\top x) = 2||(a^\top x)||^2 \geq 0$$
$\Rightarrow 2aa^\top$ je $PSD \Rightarrow$ preslikava je konveksna

6.4 Karush-Kuhn-Tuckerjevi pogoji

? 1. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:
Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $-\log(x^2) + y + z$
pri pogojih $x^2 + y^2 \leq 16$ in $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

$$x^2 + y^2 - 16 \leq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0$$
$$\lambda_1(x^2 + y^2 - 16) = 0,\ \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$
$$\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \leq 0$$
$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -\log(x^2) + y + z - \lambda_1(x^2 + y^2 - 16) - \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2}{x} - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - 2\lambda_2 z = 0$$

? 2. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:
Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $-\log(x^2) + y + z$
pri pogojih $x^2 + y^2 \leq 16$ in $y + z \geq 1$.

$$x^2 + y^2 - 16 \leq 0,\ -y - z + 1 \leq 0$$
$$\lambda_1(x^2 + y^2 - 16) = 0,\ \lambda_2(-y - z + 1) = 0$$
$$\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \leq 0$$
$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -\log\left(x^2\right) + y + z - \lambda_1(x^2 + y^2 - 16) - \lambda_2(-y - z + 1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2}{x} - 2\lambda_1 x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda_2 = 0$$

? 3. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:

Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $-\log(x^2) + y + z$
pri pogojih $x^2 - y^2 \geq 16$ in $x + y + z = 1$.

$$
\begin{aligned}
&x + y + z - 1 = 0 \\
&-x^2 + y^2 + 16 \leq 0 \\
&\lambda(-x^2 + y^2 + 16) = 0 \\
&\lambda \leq 0 \\
&L(x, y, z, \lambda, \mu) = -\log\left(x^2\right) + y + z - \lambda(-x^2 + y^2 + 16) - \mu(x + y + z - 1) \\
&\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2}{x} + 2\lambda x - \mu = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda y - \mu = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \mu = 0
\end{aligned}
$$

? 4. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:
Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $\cos(x^2) + y^2 + z$
pri pogojih $x - y = 6$ in $y^2 + z^2 \leq 1$

$$
\begin{aligned}
&x - y - 6 = 0 \\
&y^2 + z^2 - 1 \leq 0 \\
&\lambda(y^2 + z^2 - 1) = 0 \\
&\lambda \leq 0 \\
&L(x, y, z, \lambda, \mu) = \cos\left(x^2\right) + y^2 + z - \lambda(y^2 + z^2 - 1) - \mu(x - y - 6) \\
&\frac{\partial L}{\partial x} = -\sin(x^2) \cdot 2x - \mu = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y + \mu = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - 2\lambda z = 0
\end{aligned}
$$

? 5. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:
Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $\cos(x^2) + y^2 + z$
pri pogojih $x - y \leq 6$ in $y^2 + z^2 \geq 1$

$$
\begin{aligned}
&x-y-6 \leq 0,\ -y^2-z^2+1 \leq 0\\
&\lambda_1(x-y-6)=0,\ \lambda_2(-y^2-z^2+1)=0\\
&\lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \leq 0\\
&L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=\cos\left(x^2\right)+y^2+z-\lambda_1(x-y-6)-\lambda_2(-y^2-z^2+1)=0\\
&\frac{\partial L}{\partial x}=-\sin(x^2)\cdot 2x-\lambda_1=0\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda_1+2\lambda_2 y=0\\
&\frac{\partial L}{\partial z}=1+2\lambda_2 z=0
\end{aligned}
$$

? 6. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za problem:
Minimizirajte (po vseh x, y, z) funkcijo $\cos(x^2)+y^2+z$
pri pogojih $x-y \geq 6$ in $y^2+z^2=1$

$$
\begin{aligned}
&y^2+z^2-1=0\\
&-x+y+6 \leq 0\\
&\lambda(-x+y+6)=0\\
&\lambda \leq 0\\
&L(x,y,z,\lambda,\mu)=\cos\left(x^2\right)+y^2+z-\lambda(-x+y+6)-\mu(y^2+z^2-1)\\
&\frac{\partial L}{\partial x}=-\sin(x^2)\cdot 2x+\lambda=0\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda-2\mu y=0\\
&\frac{\partial L}{\partial z}=1-2\mu z=0
\end{aligned}
$$

7 Izpit 2. 2. 2021

7.1 Matrike

? 1. Pokažite, da je simetrična matrika, ki ima vse lastne vrednosti enake 1 ali -1, ortogonalna.

? 2. Naj bo $A=(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T$, kjer je $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ in $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=2$. Izračunajte $\|A\|_F$.

? 3. Pokažite, da je vsaka zgornje trikotna ortogonalna matrika diagonalna.

Za zgornje trikotno matriko velja, da je zgornje trikotna matrika tudi njen inverz. Ker je naša matrika še ortogonalna, je v tem primeru inverz matrike enak transponirani matriki. Zmnožek matrike in njenega inverza je enak identični matriki. To je možno le, če je zg. trikotna matrika diagonalna.

? 4. Podaj primer matrik A in B, da bo veljalo $\|A \otimes B\|_F$ = 6.

7.2 Izometrije

? 1. Naj bo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{c}, \phi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ in $\phi(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$, kjer so $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ **paroma pravokotni enotski vektorji**. Ali je ϕ zrcaljenje? (Če je, dokažite in zapišite ravnino zrcaljenja. Če ne, napišite protiprimer takšne preslikave ϕ.)

? 2. Naj bo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{c}, \phi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ in $\phi(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$, kjer so $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ **linearno neodvisni vektorji**. Ali je ϕ zrcaljenje? (Če je, dokažite in zapišite ravnino zrcaljenja. Če ne, napišite protiprimer takšne preslikave ϕ.)

? 3. Če je U matrika, ki pripada linearni izometriji v $\mathbb{R}^n$ v nestandardni ortonormirani bazi prostora $\mathbb{R}^n$. Potem je $\|U\|_F = 1$. (Če da, dokažite. Če ne, izračunajte pravilno vrednost.)

? 4. Naj bo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja $\phi(\mathbf{a}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}), \phi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ in $\phi(\mathbf{c}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})$, kjer so $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ paroma pravokotni enotski vektorji. Ali je ϕ rotacija/zasuk? (Če je, dokažite in zapišite os in kot zrcaljenja. Če ne, napišite protiprimer takšne preslikave ϕ.)

7.3 Integrali

? 1. Zamenjajte vrstni red integracije, tako da simbole ? zamenjate s pravimi vrednostmi. (Narišite sliko, utemeljite svoj odgovor. Integrala ni potrebno računati.)

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_1^{y+1} x dz\right) dy\right) dx = \int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? ?dx\right) dz\right) dy = \int_?^? \left(\int_?^? \left(\int_?^? ?dy\right) dx\right) dz$$

7.4 Iskanje ekstremov pri dodatnih pogojih

? 1. Naj bo a zadnja neničelna števka vaše vpisne številke. (Na primer, če je vaša vpisna številka 63201234, potem je $a = 4$.) Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x, y) = x^2 + 3\log(xy) - \log\left(y^a\right).$$

Zapišite primer krivulje $g(x, y) = a$ v $\mathbb{R}^2$, na kateri ima funkcija f ekstremno vrednost v točki $(3, 1)$.

Kvizi iz spletne učilnice

8 Vse naloge iz kvizov na spletni učilnici

8.1 Teden 1 ("kaj pričakujemo, da znate")

1. naloga

Katere od naslednjih trditev držijo za vsako kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
Which of the following statements are true for every square matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Izberite enega ali več:

- ☐ a. A ima n različnih lastnih vrednosti.
  A has n distinct eigenvalues.
- ☐ b. Vsaj ena lastna vrednost matrike A je realno število.
  The matrix A has at least one real eigenvalue.
- ☐ c. Če je $\operatorname{rang}(A) = r$, potem ima matrika A r linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti 0.
  If $\operatorname{rank}(A) = r$, then A has r linearly independent eigenvectors corresponding to eigenvalue 0.
- ☑ d. Če je $\operatorname{rang}(A) = r$, potem ima matrika A $n - r$ linearno neodvisnih vektorjev, ki pripadajo lastni vrednosti 0. ✔
  If $\operatorname{rank}(A) = r$, then A has $n - r$ linearly independent eigenvectors corresponding to eigenvalue 0.
- ☐ e. Če so vsi elementi A cela števila, potem so tudi lastne vrednosti A cela števila.
  If A has only integer entries, then the eigenvalues of A are also integers.
- ☑ f. Če so $1, 2, \ldots, n-1$ lastne vrednosti matrike A, potem je n-ta lastna vrednost A realna. ✔
  Suppose $1, 2, \ldots, n-1$ are eigenvalues of A. Then the n-th eigenvalue of A is real.

2. naloga

Katere od naslednjih trditev so resnične za 3×3 matriko A z lastnimi vrednostmi 1, -2, 0?
Which of the statements below are true for a 3×3 matrix A with eigenvalues 1, -2, 0?

Izberite enega ali več:

- ☐ a. $\det A = -1$
- ☑ b. Dimenzija ničelnega prostora matrike A je enaka 1. / Matrix A has 1-dimensional null space. ✔
- ☐ c. Dimenzija stolpičnega prostora matrike A je enaka 1. / Matrix A has 1-dimensional column space.
- ☐ d. A je obrnljiva. / A is invertible.
- ☑ e. V $\mathbb{R}^3$ lahko najdemo bazo iz lastnih vektorjev matrike A. / There is a basis of $\mathbb{R}^3$ consisting of eigenvectors of A. ✔

3. naloga

Katere od naslednjih izrazov lahko izračunamo za vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ in $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \in \mathbb{R}^3$?

Which of the expresions below can be evaluated for vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ and $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \in \mathbb{R}^3$?

Izberite enega ali več:

- [x] a. $\left(\vec{d} \times \vec{e}\right) \cdot \vec{f}$ ✔
- [ ] b. $\vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- [x] c. $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{d} \cdot \vec{e}$ ✔
- [ ] d. $\left(\vec{d} \cdot \vec{e}\right) \times \vec{f}$
- [ ] e. $\vec{d} \times \vec{b}$
- [ ] f. $\vec{a} \cdot \vec{d}$

4. naloga

Če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

koliko rešitev ima sistem

$$Ax = b?$$

Suppose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

How many solutions are there to the system

$$Ax = b?$$

Izberite enega:

- (•) a. 0 ✔
- ( ) b. 1
- ( ) c. 2
- ( ) d. neskončno / infinitely many

5. naloga

Rang matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je enak...

The rank of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

is equal to...

Izberite enega:

- a. 0
- b. 1
- c. 2 ✔
- d. 3
- e. 4
- f. Nič od naštetega
  None of the above.

6. naloga

Kdaj sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna?

When are vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ orthogonal?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. $\vec{a} = \vec{b}$
- [ ] b. $\vec{a} - \vec{b} = 0$
- [ ] c. $\vec{a} + \vec{b} = 0$
- [x] d. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ✔

7. naloga

Katere od naslednjih trditev so pravilne za vse matrike primernih velikosti?
Which of the following statements are true for all matrices of appropriate sizes?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$
- [ ] b. $A - B = B - A$
- [ ] c. $A \cdot B = B \cdot A$
- [ ] d. $(A^T)^T = A^T$
- [x] e. $(A + B)^T = B^T + A^T$ ✔
- [x] f. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ ✔

8. naloga

Naj bo A taka 5×5 matrika, da je $N(A) \subseteq C(A)$. Recimo, da po Gaussovi eliminaciji na matriki A^{T} dobimo 3 pivote.

Potem je $\dim N(A) =$ 2 ✔ in $\dim C(A) =$ 3 ✔ .

9. naloga

Kateri od naslednjih vektorjev so pravokotni na ravnino

$$5x - y + z = 2?$$

Which of the vectors below are perpendicular to the plane

$$5x - y + z = 2?$$

Izberite enega ali več:

a. \(\left[\begin{matrix}
5\\
-1\\
1
\end{matrix}\right]\)

b. \(\left[\begin{matrix}
1\\
3\\
0
\end{matrix}\right]\)

c. \(\left[\begin{matrix}
-1\\
2\\
0
\end{matrix}\right]\)

d. \(\left[\begin{matrix}
0\\
-1\\
-1
\end{matrix}\right]\)

e. \(\left[\begin{matrix}
-5\\
1\\
-1
\end{matrix}\right]\)

f. \(\left[\begin{matrix}
0\\
1\\
1
\end{matrix}\right]\)

10. naloga

Katere od naslednjih trditev so resnične za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Število linearno neodvisnih vrstic matrike A je za ena manjše od števila linearno neodvisnih stolpcev matrike A.
- [x] b. A ima največ 3 linearno neodvisne stolpce. ✔
- [ ] c. $\dim N(A) + \dim C(A) = 12$
- [ ] d. Matrika A ima lahko 4 linearno neodvisne stolpce.
- [ ] e. $\dim N(A) + \dim C(A) = 3$
- [x] f. $\dim N(A) + \dim C(A) = 4$ ✔
- [x] g. Število linearno neodvisnih vrstic matrike A je enako številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A. ✔

11. naloga

Katere od naslednjih trditev so pravilne?

Which of the statements below are true?

Izberite enega ali več:

- [x] a. Vsak vektor lahko pomnožimo s številom.
  Every vector can be multiplied by a number. ✔
- [x] b. Ko odštevamo vektorja, je pomembno, v katerem vrstnem redu ju odštejemo.
  When subtracting vectors, attention must be paid to the order of subtraction. ✔
- [ ] c. Vsakemu vektorju lahko prištejemo število.
  A number can be added to any vector.
- [ ] d. Vektorje lahko seštevamo med seboj, medtem ko skalarjev ne moremo.
  Addition of vectors is a valid operation, while addition of scalars is not.
- [ ] e. Ko seštevamo vektorja, je pomembno, v katerem vrstnem redu ju seštejemo.
  When adding two vectors, attention must be paid to the order of addition.

12. naloga

Kateri od naslednjih vektorjev so pravokotni na premico

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z?$$

Which of the vectors below are orthogonal to the line

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z?$$

Izberite enega ali več:

a. \(\left[\begin{matrix}

-3\\

-2\\

-1

\end{matrix}\right]\)

b. \(\left[\begin{matrix}

-1\\

1\\

1

\end{matrix}\right]\)

c. \(\left[\begin{matrix}

2\\

1\\

0

\end{matrix}\right]\)

d. \(\left[\begin{matrix}

3\\

2\\

1

\end{matrix}\right]\)

e. \(\left[\begin{matrix}

-2\\

3\\

0

\end{matrix}\right]\)

f. \(\left[\begin{matrix}

-1\\

2\\

0

\end{matrix}\right]\)

13. naloga

Katere od naslednjih izrazov lahko izračunamo za matrike $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ in $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$?
Which of the following expressions do make sense for matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ and $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. $A \cdot B$
- [x] b. $A + B$ ✓
- [x] c. $D \cdot A$ ✓
- [x] d. $A \cdot C$ ✓
- [ ] e. $B \cdot D^T$
- [ ] f. $D^T + A$

14. naloga

Za $n \times n$ matriko A ter vektorja $x, b \in \mathbb{R}^n$ naj velja $Ax = b$. Katere od naslednjih trditev so gotovo resnične?

Given an $n \times n$ matrix A and vectors $x, b \in \mathbb{R}^n$ suppose $Ax = b$ holds. Which of the statements below are definitely true?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. $\det A \neq 0$
- [x] b. b je linearna kombinacija stolpcev matrike A
  b is a linear combination of the columns of A ✓
- [ ] c. b je linearna kombinacija vrstic matrike A
  b is a linear combination of the rows of A
- [x] d. Rang razširjene matrike $[A|b]$ je enak rangu matrike A.
  The rank of the extended matrix $[A|b]$ is equal to the rank of A. ✓

15. naloga

Transponirana matrika zgornje trikotne $n \times n$ matrike je...
The transpose of an upper triangular $n \times n$ matrix is...

Izberite enega ali več:

- [ ] a. ... diagonalna matrika. / ... a diagonal matrix.
- [ ] b. ... stolpec. / ... a column.
- [ ] c. ... vrstica. / ... a row.
- [x] d. ... spodnje trikotna matrika. / ... a lower triangular matrix. ✓
- [ ] e. ... zgornje trikotna matrika. / ... an upper triangular matrix.

16. naloga

Dani sta 4×4 matriki A in B, za kateri velja $\det A = -1$ in $\det B = 2$. Katere od naslednjih trditev so resnične?

You are given 4×4 matrices A and B, such that $\det A = -1$ and $\det B = 2$ holds. Which of the statements below are true?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. $\det(-A) = 1$
- [x] b. $\det(AB) = -2$ ✔
- [x] c. $\det(2B) = 32$ ✔
- [x] d. $\det(A^2) = 1$ ✔
- [ ] e. $\det(2A) = -2$
- [x] f. $\det(-A) = -1$ ✔

17. naloga

Katere od naslednjih trditev držijo?
Which of the following statements are true?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
  Every upper triangular matrix is invertible.
- [x] b. Če sta prva in druga vrstica kvadratne matrike A kolinearni, potem matrika A ni obrnljiva. ✔
  If the first two rows of a square matrix A are collinear, then A is not invertible.
- [ ] c. Inverz obrnljive spodnje trikotne matrike je zgornje trikotna matrika.
  The inverse of an invertible lower triangular matrix is a lower triangular matrix.
- [ ] d. Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $Ax = b$ neskončno rešitev.
  If A is invertible, then the system $Ax = b$ has infinitely many solutions.
- [x] e. Če je matrika A obrnljiva, je inverz matrike A^{-1} enak A. ✔
  If A is invertible, then the inverse of the matrix A^{-1} is equal to A.
- [ ] f. Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.
  Every symmetric matrix is invertible.
- [x] g. Vse matrike elementarnih Gaussovih operacij so obrnljive. ✔
  All matrices of elementary Gaussian operations are invertible.
- [ ] h. Inverz obrnljive zgornje trikotne matrike je spodnje trikotna matrika.
  The inverse of an invertible upper triangular matrix is a lower triangular matrix.
- [x] i. Inverz obrnljive zgornje trikotne matrike je zgornje trikotna matrika. ✔
  The inverse of an invertible upper triangular matrix is an upper triangular matrix.
- [x] j. Inverz obrnljive simetrične matrike je simetrična matrika. ✔
  The inverse of an invertible symmetric matrix is a symmetric matrix.
- [ ] k. Vsaka kvadratna neničelna matrika ima inverz.
  Every square matrix is invertible.
- [x] l. Inverz identične matrike je identična matrika. ✔
  The inverse of the identity matrix is the identity matrix.
- [x] m. Če je matrika A^T obrnljiva, je obrnljiva tudi matrika A. ✔
  If the matrix A^T is invertible, then A is also invertible.
- [ ] n. Če matrika A ni obrnljiva, potem sistem $Ax = 0$ nima nobene rešitve.
  If the matrix A is not invertible, then the system $Ax = 0$ has no solutions.

18. naloga

Katere od naslednjih trditev držijo za vse matrike, za katere je mogoče izračunati naslednje izraze?
Which of the statements below are true for all matrices, for which the given expressions make sense?

Izberite enega ali več:

- [x] a. $\left((A^T)^{-1}\right)^T = A^{-1}$ ✔
- [ ] b. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- [x] c. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ✔
- [ ] d. $(A-B)^{-1} = A^{-1} - B^{-1}$
- [ ] e. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- [x] f. $\left((A^{-1})^T\right)^{-1} = A^T$ ✔

19. naloga

Katere trditve so resnične za vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v $\mathbb{R}^3$?

Which statements are true for vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v $\mathbb{R}^3$?

Izberite enega ali več:

- [x] a. Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležijo v isti ravnini natanko tedaj, ko $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.
  The vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lie in the same plane if and only if $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. ✔
- [x] b. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enak determinanti matrike, katere stolpci so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ is equal to the determinant of the matrix with columns $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. ✔
- [x] c. $(\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ✔
- [ ] d. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$
- [ ] e. Če je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, potem sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.
  If $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, then the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are collinear.
- [x] f. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enak determinanti matrike, katere vrstice so $\vec{a}^T, \vec{b}^T$ in $\vec{c}^T$.
  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ is equal to the determinant of the marix with rows $\vec{a}^T, \vec{b}^T$ and $\vec{c}^T$. ✔

20. naloga

Če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

koliko rešitev ima sistem

$$Ax = b?$$

Suppose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

How many solutions are there to the system

$$Ax = b?$$

Izberite enega:

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. neskončno / infinitely many ✔

21. naloga

Muha se nahaja v točki $(4, 5, 6)$ in želi po najkrajši poti odleteti v točko $(1, 3, 5)$. V kateri smeri naj leti?

A fly located at the point $(4, 5, 6)$ wishes to fly the shortest distance to the point $(1, 3, 5)$. Which direction should it choose?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. \(\left[\begin{matrix}
  3\\
  2\\
  1
  \end{matrix}\right]\)
- [ ] b. \(\left[\begin{matrix}
  1\\
  3\\
  5
  \end{matrix}\right]\)
- [x] c. \(\left[\begin{matrix}
  -3\\
  -2\\
  -1
  \end{matrix}\right]\) ✔
- [ ] d. \(\left[\begin{matrix}
  -1\\
  -3\\
  -5
  \end{matrix}\right]\)

22. naloga

Katere od naslednjih matrik so obrnljive?
Which of the matrices below are invertible?

Izberite enega ali več:

- [x] a. Matrika, katere determinanta je 6.
  A matrix with dterminant equal to 6. ✔
- [ ] b. Matrika, katere karakteristični polinom je enak $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda$.
  A matrix with characteristic polynomial equal to $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda$.
- [ ] c. Diagonalizabilna matrika z determinanto 0.
  A diagonalizable matrix with determinant equal to 0.
- [ ] d. Matrika, katere determinanta je 0.
  A matrix with determinant equal to 0.
- [x] e. Matrika, katere karakteristični polinom je enak $\lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$.
  A matrix with characteristic polynomial equal to $\lambda^4 - 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$. ✔

23. naloga

Za dva vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ povežite trditev s pravilnin matematičnim izrazom.

Given vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ join the statement to a valid mathematical expression.

Vektor $\vec{a}$ je daljši kot $\vec{b}$.
Vector $\vec{a}$ is longer than $\vec{b}$. — $\vec{b}\cdot\vec{b} < \vec{a}\cdot\vec{a}$ ✔

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna.
Vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are orthogonal. — $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ✔

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta vzporedna.
Vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are parallel. — $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ ✔

24. naloga

Če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

koliko rešitev ima sistem

$$Ax = b?$$

Suppose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

How many solutions are there to the system

$$Ax = b?$$

Izberite enega:

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. neskončno / infinitely many ✔

25. naloga

Naj bo premica p v $\mathbb{R}^3$ podana parametrično s predpisom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Katere od naslednjih trditev so resnične?

Suppose that a line p in $\mathbb{R}^3$ is given parametrically

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Which of the statements below are true?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Točka $(6, 3, -2)$ leži na premici p.
  The point $(6, 3, -2)$ lies on the line p.
- [x] b. Vektor $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.
  The vector $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ is parallel to the line p. ✔
- [x] c. Vektor $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.
  The vector $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ is parallel to the line p. ✔
- [ ] d. Vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ je vzporeden s premico p.
  The vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ is parallel to the line p.
- [x] e. Točka $(5, 6, 0)$ leži na premici p.
  The point $(5, 6, 0)$ lies on the line p. ✔
- [x] f. Točka $(-1, 3, 2)$ leži na premici p.
  The point $(-1, 3, 2)$ lies on the line p. ✔

26. naloga

Če matriko $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ z desne množimo vektorjem $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ...

Izberite enega ali več:

- [x] a. je zmnožek enak drugemu stolpcu matrike A. ✔
- [ ] b. je zmnožek vektor s tremi elementi.
- [ ] c. je zmnožek enak elementu v drugi vrstici in drugemu stolpcu matrike A.
- [x] d. je zmnožek vektor s petimi elementi. ✔
- [ ] e. je zmnožek matrika s petimi vrsticami in tremi stolpci.
- [ ] f. zmnožka ne moremo izračunati.
- [ ] g. je zmnožek enak drugi vrstici matrike A.

27. naloga

Dani sta obrnljivi $n \times n$ matriki A in B. Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

You are given invertible $n \times n$ matrices A and B. Which of the statements below are true?

Izberite enega ali več:

- [x] a. $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})$ ✔
- [ ] b. $\det(AB) = 1$
- [x] c. Matrika AB je obrnljiva. / The matrix AB is invertible. ✔
- [x] d. $\det(AB) = \det(BA)$ ✔
- [x] e. $\det(A^2) > 0$ ✔
- [ ] f. Matrika $A + B$ je obrnljiva. / The matrix $A + B$ is invertible.

28. naloga

Druga komponenta vektorskega produkta vektorjev

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

je enaka...

The second component of the cross product of vectors

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

is equal to...

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Nič od naštetega. / None of the listed.
- [ ] b. 3
- [x] c. 7 ✔
- [ ] d. 0
- [ ] e. 9
- [ ] f. -7

29. naloga

Ali točki

$$(1, 2, 3) \text{ in } (3, 2, 1)$$

ležita na istem bregu ravnine

$$3x - y - z = 2?$$

Do the points

$$(1, 2, 3) \text{ and } (3, 2, 1)$$

both lie in the same half-space of the plane

$$3x - y - z = 2?$$

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Tega iz podatkov ne moremo vedeti. / This cannot be determined from the given data.
- [x] b. Ne. / No. ✔
- [ ] c. Da. / Yes.

30. naloga

Če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ velja $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, katere od naslednjih trditev gotovo držijo?

If $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ for matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, which of the following statements are true?

Izberite enega ali več:

- [ ] a. Matriki A in B nista obrnljivi. / Matrices A and B are not invertible.
- [x] b. $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ✔
- [ ] c. $A^T = B$
- [ ] d. $A = 2B$
- [ ] e. $A^{-1} = B$
- [ ] f. $A^{-1} = 2B$
- [x] g. $A^{-1} = \frac{1}{2}B$ ✔

8.2 Teden 2

1. naloga

Katere od naslednjih trditev so pravilne za kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Which of the following are true for square matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Izberite enega ali več:

- [ ] $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(BA)$
- [ ] $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(A)\mathrm{rk}(B)$
- [ ] $\mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)$
- [x] $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(5A)$ ✔
- [x] Če je $\mathrm{rk}(A) = n$, potem je $\mathrm{rk}(A^TA) = n$.
  If $\mathrm{rk}(A) = n$, then $\mathrm{rk}(A^TA) = n$. ✔
- [x] Če je A obrnljiva, potem je $\mathrm{rk}(A^{-1}) = \mathrm{rk}(A)$.
  If A invertible, then $\mathrm{rk}(A^{-1}) = \mathrm{rk}(A)$. ✔

2. naloga

Katere od naslednjih trditev so pravilne?

Which of the following are true?

Izberite enega ali več:

- [x] Če je $A = uu^T$, kjer je $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, potem je $||A||_F = 5$.

  If $A = uu^T$, where $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, then $||A||_F = 5$.

- [ ] Za simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ za lastnimi vrednostmi 1,2,3,4, je $||B||_F = \sqrt{10}$.

  If symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ has eigenvalues 1,2,3 and 4, then $||B||_F = \sqrt{10}$.

- [x] Če je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ obrnljiva matrika s singularnima vrednostima σ in τ, potem je $||A^{-1}||_F = \sqrt{\sigma^{-2} + \tau^{-2}}$.

  If an invertible matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ has singular values σ and τ, then $||A^{-1}||_F = \sqrt{\sigma^{-2} + \tau^{-2}}$.

- [ ] Če sta singularni vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ enaki σ in τ, potem sta singularni vrednosti matrike A^2 enaki σ^2 in τ^2.

  If σ and τ are the singular values of a matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, then the singular values of A^2 are equal to σ^2 and τ^2.

3. naloga

Katere od naslednjih trditev so pravilne za kvadratne matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Which of the following are true for square matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Izberite enega ali več:

- [x] Če sta $x, y \in \mathbb{R}^n$ poljubna vektorja, potem je $\mathrm{tr}(xy^T) = x^T y$.

  If $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrary vectors, then $\mathrm{tr}(xy^T) = x^T y$.

- [ ] Če je A obrnljiva, potem je $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

  If A invertible, then $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

- [x] $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(A^T C^T B^T)$.
- [ ] $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(A^T B^T C^T)$.
- [x] $\mathrm{tr}((A^T - A)^2) = 2\mathrm{tr}(A^2) - 2\mathrm{tr}(A^T A)$
- [ ] $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$
- [ ] $\mathrm{tr}((A^T - A)^2) = 0$
- [ ] Če je A obrnljiva, potem je $\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$.

  If A invertible, then $\mathrm{tr}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{tr}(A)}$.

- [x] Če so matrike A, B, C simetrične, potem je $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$.

  If A, B, C symmetric matrices, then $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$.

8.3 Teden 3

1. naloga

Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ lastne vrednosti $1, 1, 4, 10$ in matrika $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lastne vrednosti $-1, 2$ in 5. Katere od naslednjih **niso** lastne vrednosti matrike $A \otimes B$?

Let $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ be a matrix with eigenvalues $1, 1, 4, 10$ and $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matrix with eigenvalues $-1, 2$ in 5. Which of the following are **not** the eigenvalues of $A \otimes B$?

Izberite enega ali več:

- [x] 9 ✔
- [ ] 2
- [x] 1 ✔
- [ ] 50
- [x] 0 ✔

2. naloga

Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{12\times 4}$ velja $||A||_F = 3$ in naj ima simetrična matrika $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ lastni vrednosti 3 in 4. Potem je $||A \otimes B||_F$ enako:

Let $A \in \mathbb{R}^{12\times 4}$ have $||A||_F = 3$ and let a symmetric matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ have eigenvalues 3 and 4. The $||A \otimes B||_F$ is equal to:

Izberite enega ali več:

- [ ] 36
- [ ] 75
- [ ] 5
- [x] 15 ✔
- [ ] $A \otimes B$ ne obstaja za omenjena A in B.

  For such A and B $A \otimes B$ does not exist.

3. naloga

Katere od naslednjih trditev so resnične?

Which of the following are true?

Izberite enega ali več:

- [x] $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ✔
- [x] $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ ✔
- [ ] $(A \otimes B)^T = B^T \otimes A^T$
- [ ] $(A \otimes B)^{-1} = B^{-1} \otimes A^{-1}$
- [x] Če sta $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalni matriki, potem je tudi matrika $A \otimes B$ ortogonalna. ✔

  If $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ are orthogonal matrices, then $A \otimes B$ is orthogonal as well.

8.4 Teden 4

1. naloga

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ simetrična matrika z negativno determinanto. Katera od naslednjih trditev držijo?

Let a symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ have negative determinant. Which of the following is true?

Izberite enega ali več:

- [x] a. A je nedefinitna. ✔

  A is indefinite.
- [ ] b. A je negativno semidefinitna.

  A is negative semidefinite.
- [ ] c. A je pozitivno semidefinitna.

  A is positive semidefinite.
- [ ] d. A je negativno definitna.

  A is negative semidefinite.
- [ ] e. A je pozitivno definitna.

  A is positive definite.

2. naloga

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična pozitivno semidefinitna matrika. Katere od naslednjih trditev zagotovo držijo?

Which of the following are true for a symmetric positive semidefinite matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Izberite enega ali več:

- [x] a. Obstaja n ortogonalnih lastnih vektorjev matrike A. ✔

  There exist n orthogonal eigenvectors for A.

- [ ] b. A ima n različnih lastnih vrednosti.

  A has n distinct eigenvalues.

- [x] c. Karakteristični polinom matrike A ima lahko večkratne ničle. ✔

  The characteristic polynomial of A can have multiple roots.

- [x] d. Matrika A ima vse lastne vrednosti nenegativne. ✔

  All eigenvalues of A are nonnegative.

- [ ] e. $\mathrm{tr}(A) = 0$

- [x] f. Obstaja n linearno neodvisnih lastnih vektorjev matrike A. ✔

  There exist n linearly independent eigenvectors for A.

- [x] g. Matriko A lahko zapišemo kot $A = B^T B$ za neko matriko B enakega ranga kot A. ✔

  Matrix A can be written as $A = B^T B$, such that B is a matrix of the same rank as A.

- [ ] h. $\det(A) \leq 0$

8.5 Teden 5

1. naloga

Množica vseh 3×3 matrik, katerih elementi so nenegativna realna števila, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

The set of all 3×3 with non-negative real entries is a vector subspace of $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

2. naloga

Če je U linearna ogrinjača vektorjev $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, potem je $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ baza za U.

If U is the linear span of vectors $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, then $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ is a basis for U.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

3. naloga

V vsaki bazi $\mathbb{R}^{2\times 4}$ so največ 4 elementi.
There are at most 4 elements in every basis of $\mathbb{R}^{2\times 4}$.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

4. naloga

Obstaja baza prostora $\mathbb{R}_3[x]$, ki vsebuje le polinome stopnje točno 3.

There is a basis of the vector space $\mathbb{R}_3[x]$ which contains only polynomials of degree exactly 3.

Izberite enega:

- ◉ Drži ✔
- ○ Ne drži

5. naloga

Dimenzija linearne ogrinjače vektorjev $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je enaka k.

The dimension of the linear span of vectors $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ is equal to k.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

6. naloga

Naj bo V vektorski podprostor vektorskega prostora U, $\dim \mathrm{U} = 8$, ter naj bo $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7\}$ baza V. Če je $\mathbf{u}$ katerikoli vektor v U, ki *ne* leži v V, potem je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7, \mathbf{u}\}$ baza za U.

Assume V is a vector subspace of a vector space U, $\dim \mathrm{U} = 8$, and let $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7\}$ be a basis for V. If $\mathbf{u}$ is any vector in U, which does *not* lie in V, then $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_7, \mathbf{u}\}$ is a basis for U.

Izberite enega:

- ◉ Drži ✔
- ○ Ne drži

7. naloga

Ravnina z enačbo $4x + 3y + 2z = 1$ je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

The plane given by $4x + 3y + 2z = 1$ is a vector subspace of $\mathbb{R}^3$.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

8. naloga

Naj bo A realna $n \times m$ matrika. Če ima sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ le eno rešitev, potem so stolpci matrike A linearno neodvisni.

Suppose A is a real $n \times m$ matrix. If the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has exactly one solution, then A has linearly independent columns.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

8.6 Teden 6

1. naloga

Preslikava, ki kvadratni matriki A priredi njen inverz A^{-1}, je linearna.

The map which assigns the inverse A^{-1} to a square matrix A is linear.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

Naj bo A kvadratna matrika in φ preslikava, ki matriki priredi njen inverz. Potem velja $\varphi(2A) = (2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$. Ker ta preslikava ni zaprta za množenje s skalarjem, ni linearna.

2. naloga

Če je 0 lastna vrednost linearne preslikave $\tau\colon V \to V$, potem je $\dim(\mathrm{im}(\tau)) \leq \dim(V) - 1$.

If 0 is an eigenvalue of a linear map $\tau\colon V \to V$, then $\dim(\mathrm{im}(\tau)) \leq \dim(V) - 1$.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Če je 0 lastna vrednost linearne preslikave, to pomeni, da je matrika, ki pripada tej linearni preslikavi, največ ranga $n - 1$. Posledično to pomeni, da je dimenzija jedra linearne preslikave najmanj 1 in slika linearne preslikave največ $n - 1$.

3. naloga

Recimo, da imata 8×8 matriki A in B obe lastno vrednost 3, A z lastnim vektorjem $\mathbf{u}$, B pa z lastnim vektorjem $\mathbf{v}$. Potem je $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ lastni vektor matrike $A + B$.

Suppose that 8×8 matrices A and B both have eigenvalue 3, A with eigenvector $\mathbf{u}$, B with eigenvector $\mathbf{v}$. Then $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is an eigenvector of $A + B$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

4. naloga

Naj bosta B in C dve taki bazi vektorskega prostora V, da bijektivni linearni preslikavi $\phi\colon V \to V$ pripada glede na B in C ista matrika, tj.

$$A_{\phi,B} = A_{\phi,C}.$$

Potem sta bazi enaki, tj. $B = C$.

Assume B and C are two bases of a vector space V, such that the matrices corresponding to a linear bijection $\phi\colon V \to V$ are equal, ie.

$$A_{\phi,B} = A_{\phi,C}.$$

Then the bases are equal, ie. $B = C$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

Recimo, da imamo bazi $B = b_1, ..., b_n$ in $C = 2b_1, ..., 2b_n$ in preslikavo, ki ji pripada identična matrika. Potem trditev ne drži, ker bazi nista enaki, vendar obema pripada ista matrika.

5. naloga

Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^6$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Potem je $\dim(\ker(\tau)) \geq 1$.

Assume $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^6$ is a linear map for which

$$\tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

holds. Then $\dim(\ker(\tau)) \geq 1$.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Preslikava slika spodnjo vrstico matrik, ki sta različni, v nekaj enakega. To pomeni, da preslikava ni injektivna, posledično pa tudi, da je v jedru preslikave vsaj en element.

6. naloga

V jedru linearne preslikave $\theta\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je vsaj en neničeln polinom.

The kernel of a linear map $\theta\colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ contains at least one non-zero polynomial.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Matrika, ki pripada tej preslikavi, ne more imeti ranga 5, ampak največ 4, zato je dimenzija jedra te preslikave vsaj 1.

7. naloga

Če za neničeno linearno preslikavo $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ velja $\psi^2 = \psi \circ \psi = 0$, potem je $\dim(\operatorname{im}(\psi)) = 1$.
If $\psi^2 = \psi \circ \psi = 0$ holds for a non-zero linear map $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, then $\dim(\operatorname{im}(\psi)) = 1$.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Preslikava je neničelna, zato njen rang in posledično slika ne moreta biti 0. Ker je kompozitum bijektivnih preslikav bijektivna preslikava, rang in slika preslikave tudi ne moreta biti 3. Če bi slika preslikave bila enaka 2, bi to pomenilo, da sta, recimo, $\psi(a), \psi(b)$ linearno neodvisna. Vsaj eden od njiju ni v $\ker(\psi)$ (recimo a), vendar to pomeni, da bi veljalo $\psi^2(a) \neq 0$ in $\psi^2 \neq 0$, zato rang in slika ne moreta biti 2. Ostane tako samo še možnost, da je slika preslikave enaka 1. (Recimo, da je to prav razloženo)

8. naloga

Naj bosta $u, v \in V$ linearno neodvisna lastna vektorja linearne preslikave $\phi: V \to V$. Če je $u + v$ tudi lastni vektor za ϕ, potem u in v pripadata isti lastni vrednosti.

Assume $u, v \in V$ are linearly independent eigenvectors of a linear map $\phi: V \to V$. If $u + v$ is also an eigenvector of ϕ, then u and v correspond to the same eigenvalue.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

$$\phi\vec{u} = \lambda\vec{u}, \phi\vec{v} = \mu\vec{v}$$
$$\phi(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$$
$$\phi\vec{u} + \phi\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$
$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$
$$\lambda\vec{u} - \alpha\vec{u} + \mu\vec{v} - \alpha\vec{v} = 0$$

Ker sta $\vec{u}, \vec{v}$ linearno neodvisna, bo enačba veljala le, če bo veljalo tudi $\lambda = \mu = \alpha$.

9. naloga

Linearna preslikava, ki 5×5 matriki A priredi njeno transponiranko A^{T}, ima lastni vrednosti 1 in -1.

The linear map, which maps a 5×5 matrix A into its transpose A^{T}, has 1 and -1 as eigenvalues.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Primer takih matrik sta identična matrika I in antisimetrična matrika, za katero velja $A^\mathsf{T} = -A$. Trditev torej drži.

Z nekoliko več dela lahko sestavimo tudi matriko velikost 25×25, ki ima v vsakem stolpcu in v vsaki vrstici samo eno 1, ostale vrednosti so 0. 5 od teh enic bodo na diagonali, zato bo imela ta matrika vsaj 5 lastnih vrednosti enakih 1, v preostalem delu matrike pa bo 10 lastnih vrednosti enakih 1 in 10 lastnih vrednosti -1.

10. naloga

Za poljubne tri vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ obstaja linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ po vrsti preslika v vektorje $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$.

For three arbitrarily chosen vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ there is a linear map $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, which maps $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ into $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ in that order.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

11. naloga

Katere od naslednjih preslikav so linearne?

Which of the following are linear transformations?

Izberite enega ali več:

- ☐ $\alpha\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \alpha(A) = A + I$
- ☑ $\eta\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{p\times q}, \eta(X) = AXB$, za katerikoli matriki A in B, da je produkt AXB definiran (for any matrices A and B, such that the product AXB is defined) ✔
- ☑ $\theta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], \theta(p) = p' - p$ ✔
- ☑ $\beta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^2, \beta(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$ ✔
- ☑ $\varphi\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \varphi(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ✔
- ☐ $\theta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], \theta(p(x)) = p(x) + 2x + 1$
- ☐ $\omega\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \omega(A) = \det(A)$

12. naloga

Za vsako linearno preslikavo $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ima preslikava $\phi^2 = \phi \circ \phi$ le nenegativne lastne vrednosti.

For each linear map $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ the eigenvalues of $\phi^2 = \phi \circ \phi$ are non-negative.

Izberite enega:

- ○ Drži
- ◉ Ne drži ✔

Ne drži. Primer take preslikave je $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, katere kvadrat je enak $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ki ima dvakratno lastno vrednost -1.

13. naloga

Naj bosta D in E dve diagonalni matriki, ki pripadata linearni preslikavi τ (glede na neki dve bazi). Potem imata D in E na diagonali enake vrednosti (lahko v različnem vrstnem redu).

Suppose D and E are two diagonal matrices corresponding to a linear map τ (w.r.t. two bases). Then D and E have the same values on the diagonal (possibly in a different order).

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Matrike, ki pripadajo neki linearni preslikavi, imajo iste lastne vrednosti, ker so si podobne. Ker sta tako D kot tudi E diagonalni, imata na diagonali lastne vrednosti, ki pa so lahko v različnem vrstnem redu.

8.7 Teden 7

1. naloga

Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ injektivna linearna preslikava, ki ohranja vektorski produkt, tj. $\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) \times \phi(\mathbf{b})$. Potem je ϕ izometrija.

Assume $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is an one-to-one linear map, which preserves the cross product, ie. $\phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a}) \times \phi(\mathbf{b})$. Then ϕ is an isometry.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Naj bodo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ enotski bazni vektorji. Potem velja

$$\phi(\vec{i}) = \phi(\vec{j} \times \vec{k}) = \phi(\vec{j}) \times \phi(\vec{k}) \implies \phi(\vec{j}) \perp \phi(\vec{k})$$

in podobno tudi za $\vec{j}$ in $\vec{k}$. Matrika, ki pripada tej izometriji je torej ortogonalna, od koder sklepamo, da je tudi baza $(\phi(\vec{i}), \phi(\vec{j}), \phi(\vec{k}))$ ortogonalna. Vektorje v tej bazi se torej da normirati, od koder dobimo ortonormirano bazo $(\alpha\phi(\vec{i}), \beta\phi(\vec{j}), \gamma\phi(\vec{k}))$. Ker izometrijam pripadajo ortogonalne matrike v ortonormiranih bazah, je ta preslikava res izometrija.

2. naloga

Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna izometrija, za katero velja $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\phi(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ in $\phi(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$, kjer so $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ paroma pravokotni enotski vektorji. Potem je ϕ zrcaljenje čez ravnino.

Assume that $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is a linear isometry such that $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\phi(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$ and $\phi(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$ holds for pairwise orthogonal unit vectors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ and $\mathbf{c}$. Then ϕ is a reflection.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Tej izometriji pripada matrika $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. Ta matrika ima dve lastni vrednosti 1 in eno lastno vrednost -1, kar pomeni, da gre za zrcaljenje čez ravnino.

3. naloga

Če je $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna izometrija, potem ψ ohranja vektorski produkt, tj. za poljubna vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ velja $\psi(\mathrm{a} \times \mathrm{b}) = \psi(\mathrm{a}) \times \psi(\mathrm{b})$.

A linear isometry $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preserves the cross product, ie. for arbitrary vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ the equality $\psi(\mathrm{a} \times \mathrm{b}) = \psi(\mathrm{a}) \times \psi(\mathrm{b})$ holds.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

Trditev ne drži. Denimo, da imamo izometrijo $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ in vektorje $\vec{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Potem je $\psi(\vec{i} \times \vec{j}) = \psi(\vec{k}) = \vec{k}$ in $\psi(\vec{i}) \times \psi(\vec{j}) = -\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$, kar ni enako.

4. naloga

Obstaja linearna izometrija prostora $\mathbb{R}^3$, ki ima lastne vrednosti 1, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

There is a linear isometry of the space $\mathbb{R}^3$ with eigenvalues 1, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ and $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

Drži. Primer take izometrije je $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos(\frac{\pi}{3})&-\sin(\frac{\pi}{3})\\0&\sin(\frac{\pi}{3})&\cos(\frac{\pi}{3})\end{bmatrix}$.

8.8 Teden 9

1. naloga

Če vemo, da za funkcijo $h(x, y)$ velja $h_y(1, 0) > 0$ in $h(1, 0) = 0$, potem je $h(1, 1) > 0$.

For $h(x, y)$ we have $h_y(1, 0) > 0$ and $h(1, 0) = 0$. Then $h(1, 1) > 0$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

2. naloga

Funkcija $f(x,y,z) = xyz^2$ pri majhnem pomiku iz točke $(1,1,1)$ najhitreje naraste v smeri $[1,1,1]^T$.

The greatest rate of increase of the function $f(x,y,z) = xyz^2$ from the point $(1,1,1)$ will be in the direction of $[1,1,1]^T$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

3. naloga

Če je funkcija $f\colon \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ podana s predpisom $f(x,y) = \log(x)$, potem je $grad(f)(x,y) = \frac{1}{x}$.

For a function $f\colon \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ defined by $f(x,y) = \log(x)$ its gradient is equal to $grad(f)(x,y) = \frac{1}{x}$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

4. naloga

Tangentna ravnina na graf funkcije $h(x,y) = x^2 - y^2$ skozi točko $(1,1,0)$ ima enačbo $2x - y + z = 1$.

The tangent plane to the graph of the function $h(x,y) = x^2 - y^2$ through the point $(1,1,0)$ has the equation $2x - y + z = 1$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

5. naloga

Smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\vec{a}$ je enak $grad f(\vec{a})$.

The directional derivative of f in the direction of the vector $\vec{a}$ is $grad f(\vec{a})$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

8.9 Teden 11

1. naloga

Če funkcija $f(x, y)$ doseže maksimalno vrednost na krivulji $x^2 + 2y^2 = 3$ v točki $(1, 1)$, potem je $grad(f)(1, 1)$ vzporeden vektorju $[1, 2]^T$.

If a function $f(x, y)$ attains its maximum value on the curve $x^2 + 2y^2 = 3$ at the point $(1, 1)$, then $grad(f)(1, 1)$ is parallel to the vector $[1, 2]^T$.

Izberite enega:

- Drži ✔
- Ne drži

2. naloga

Če je $f_x(a, b) = 0$, $f_{xx}(a, b) = 0$ in $f_{xy}(a, b) = 3$, ima funkcija $f(x, y)$ v točki (a, b) lokalni maksimum.

Suppose $f_x(a, b) = 0$, $f_{xx}(a, b) = 0$, and $f_{xy}(a, b) = 3$. Then the function $f(x, y)$ has a local maximum at (a, b).

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

3. naloga

Če vemo, da za funkcijo $h(x, y)$ velja $h_y(1, 0) > 0$ in $h(1, 0) = 0$, potem je $h(1, 1) > 0$.

For $h(x, y)$ we have $h_y(1, 0) > 0$ and $h(1, 0) = 0$. Then $h(1, 1) > 0$.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔

4. naloga

Če je determinanta Hessejeve matrike v stacionarni točki funkcije petih spremenljivk negativna, potem ima funkcija v tej točki lokalni minimum.

If the determinant of the Hesse matrix at a stationary point of a function of five variables is negative, then the stationary point is a local minimum.

Izberite enega:

- Drži
- Ne drži ✔