2. kolokvij iz Matematike 1 (21. januar 2020)

1. **[25 točk]** Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ortonormirana baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Linearni izometriji $\phi, \psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na bazi $\mathcal{B}$ delujeta tako

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}) &= \mathbf{v}, \quad \phi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, \quad \phi(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \\ \psi(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}, \quad \psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \quad \psi(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

   (a) Zapiši matriki, ki pripadata ϕ in ψ v bazi $\mathcal{B}$. Klasificiraj ϕ in ψ kot izometriji.

   (b) Utemelji, da je $\psi \circ \phi$ izometrija, in zapiši matriko, ki ji pripada v bazi $\mathcal{B}$. Poišči realne lastne vrednosti $\psi \circ \phi$ in izrazi pripadajoče lastne vektorje v bazi $\mathcal{B}$.

Rešitev: (a) Matriki preberemo direktno iz definicij

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitro lahko tudi vidimo, da je $\det(A_\phi) = \det(A_\psi) = -1$, kar pomeni, da imata ϕ in ψ (vsaj) eno lastno vrednost -1. Tako vemo, da sta preslikavi zrcaljenji ali zrcalni rotaciji. Iz

$$\operatorname{tr}(A_\phi) = \operatorname{tr}(A_\psi) = 1 = -1 + 2\cos(\varphi),$$

kjer je φ kot zrcalne rotacije, lahko sklepamo, da $\varphi = 0$, kar pomeni, da sta ϕ in ψ zrcaljenji.
(b) Matriko A, ki predstavlja $\psi \circ \phi$, lahko dobimo z množenjem matrik $A_\psi A_\phi$, še hitreje pa direktno iz definicij

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Da je $\psi \circ \phi$ izometrija lahko utemeljimo s tem, da imamo kompozitum izometrij, ali pa da opazimo, da je A očitno ortogonalna matrika (in A predstavlja $\psi \circ \phi$ v ortonormirani bazi $\mathcal{B}$). Ker je $\det(A) = 1$, lahko sklepamo, da gre za rotacijo, iz

$$\operatorname{tr}(A) = 0 = 1 + 2\cos(\varphi)$$

pa da gre za rotacijo za kot $\varphi = -\pi/3$. Os rotacije je lastni vektor (oz. podprostor) za lastno vrednost $\lambda_1 = 1$. Določimo jo lahko z Gaussovo eliminacijo na matriki

$$A - I \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder lahko preberemo lastni vektor $\mathbf{v} = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$.

2. **[25 točk]** Poišči koordinate masnega središča homogenega telesa, ki je določeno z neenačbami

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \text{ in } z \geq 0.$$

(Koordinate masnega središča homogenega telesa D so dane z

$$x^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D x\,dxdydz,\ y^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D y\,dxdydz \text{ ter } z^* = \frac{1}{m} \iiint\limits_D z\,dxdydz,$$

kjer je $m = \iiint_D dxdydz$.)

Rešitev: Telo, ki ga opisujejo zgornje neenakosti bi lahko opisali tako: Iz zgornje polovice krogle s središčem v izhodišču in polmerom 2 izdolbemo zgornjo polovico krogle s (središčem v izhodišču in) polmerom 1. Računali bomo v sfernih koordinatah, v teh je telo dano z neenakostmi:

$$1 \leq r \leq 2\ ,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \text{ ter } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

kar so hkrati meje za integracijo v sfernih koordinatah.

Masa je enaka

$$m = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r^2 \cos\theta\, dr = 2\pi\Big(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\Big)\Big(\int_1^2 r^2\, dr\Big) = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14\pi}{3}.$$

Zaradi simetrije (in homogenosti) bi pričakovali, da velja $x^* = y^* = 0$. Tudi direktno z integralom ni težko:

$$x^* = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r\cos\phi\cos\theta \cdot r^2\cos\theta\, dr = 0,$$

saj je $\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = 0$. Podobno se zgodi z y^*. Tretja komponenta masnega središča je enaka

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 r\sin\theta \cdot r^2\cos\theta\, dr \\ &= \frac{3}{14\pi} \cdot 2\pi\Big(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\Big)\Big(\int_1^2 r^3\, dr\Big) \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{56}, \end{aligned}$$

kjer smo $\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$ izračunali z uvedbo nove spremenljivke $t = \sin\theta$ in dobili $\int_0^1 t\, dt$.

Masno središče telesa je torej v točki $T(0, 0, \frac{45}{56})$.

3. [**25 točk**] Za dana vektorja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ definiramo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}.$$

   (a) Poišči stacionarne točke funkcije f.

   (b) Katere od dobljenih stacionarnih točk so lokalni maksimi? Katere so lokalni minimi?

Rešitev: (a) Stacionarne točke so tiste, v katerih je gradient enak $\mathbf{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\mathsf{T} + \mathbf{b}^\mathsf{T} = \mathbf{0}^\mathsf{T}.$$

Ta enačba ima rešitev $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$. To je tudi edina stacionarna točka f (oz. krajevni vektor stacionarne točke).

(b) Hessejeva matrika f je

$$H_f = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(2(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{b}\right) = 2I_n,$$

kjer je I_n identična matrika velikosti $n \times n$. Ta H_f je torej pozitivno definitna v stacionarni točki $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$, zato je ta točka lokalni minimum.

4. [**25 točk**] Funkcijo

$$f(x,y) = y - x$$

opazujemo na območju

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}.$$

Poišči minimum funkcije f na območju D.

Rešitev: Zapišimo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = y - x - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(x^2 - y)$$

Izračunajmo še odvoda L po x in y.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -1 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2$$

Obravnavati je potrebno primere:

(i) $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 0$. Očitno tu ni rešitve, saj dobimo enačbi $-1 = 0$ in $1 = 0$.

(ii) $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 \neq 0$. Poleg enačb

$$-1 - 2\lambda_2 x = 0$$
$$1 + \lambda_2 = 0$$

imamo tu še pogoj $x^2 - y = 0$. Dobimo $\lambda_2 = -1, x = 1/2$ in $y = 1/4$. Ker je $\lambda_2 < 0$, ta rešitev izpolnjuje vse potrebne pogoje za minimum (ne vemo pa še, ali je to edina točka, ki izpolnjuje vse potrebne pogoje).

(iii) $\lambda_1 \neq 0$ in $\lambda_2 = 0$. Tokrat imamo Lagrangeove enačbe

$$-1 - 2\lambda_1 x = 0$$
$$1 - 2\lambda_1 y = 0$$

in pogoj $x^2 + y^2 = 2$. Dobimo dve rešitvi $(\lambda_1, x, y) = (\pm 1/2, \mp 1, \pm 1)$. Rešitev $(-1/2, 1, -1)$ ne leži v dopustnem območju, rešitev $(1/2, -1, 1)$ pa ne izpolnjuje pogoja $\lambda_1 \leq 0$.

(iv) $\lambda_1 \neq 0$ in $\lambda_2 \neq 0$. V tem primeru imamo enačbi

$$-1 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0$$
$$1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$$

in pogoja $x^2 - y = 0$ ter $x^2 + y^2 = 2$. Že samo iz pogojev dobimo dve možnosti $(x,y) = (\pm 1, 1)$. Za primer $(-1,1)$ dobimo $(\lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 0)$, za primer $(1,1)$ pa dobimo $(\lambda_1 = 2/5, \lambda_1 = -1/5)$. V obeh primerih imamo $\lambda_1 > 0$, kar pomeni, da tu ni minimuma (je pa maksimum v točki $(-1,1)$.

Edina rešitev, ki zadošča vsem potrebnim pogojem je torej $(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = (1/2, 1/4, 0, -1)$, minimum f je v $(1/2, 1/4)$.