1. kolokvij iz Matematike 1 (28. november 2019)

1. [**25 točk**] Poišči matriko ranga 1, ki je v Frobeniusovi normi najbližja matriki

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

tj. tisto matriko $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ranga 1, za katero je število $\|X - K\|_F$ najmanjše možno.

Rešitev: Po Eckart–Youngovem izreku lahko aproksimacijo ranga 1 dobimo iz singularnega razcepa matrike K. Ker je K simetrična, bo dovolj poiskati ortogonalno matriko V in diagonalno matriko D, da bo $K = VDV^\mathsf{T}$. V resnici iz V rabimo le lastni vektor za tisto lastno vrednost K, ki je po absolutni vrednosti največja.

Poiščimo najprej lastne vrednosti K:

$$\det(K - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Tu smo od 3. vrstice odšteli 1. vrstico, nato pa prvemu stolpcu prišteli 3. stolpec. Ker je zadnja matrika bločno zgornje trikotna, dobimo:

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0.$$

Lastne vrednosti K so torej $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Ker iščemo aproksimacijo ranga 1, rabimo le lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 5$. Tega lahko uganemo: Ker je vsota vsake vrstice K enaka 5, je $\mathbf{v}_1' = [1,1,1]^\mathsf{T}$ pripadajoč lastni vektor. Še normiramo ga in dobimo $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^\mathsf{T}$, to je tudi prvi stolpec matrike V. Matrika ranga 1, ki najbolje aproksimira K je torej

$$X = V \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^\mathsf{T} = 5\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. [**25 točk**] Ali je katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

pozitivno semidefinitna? Za tisto, ki je, izračunaj razcep Choleskega.

Rešitev: Pozitivno semidefinitnost lahko testiramo s Sylvestrovim kriterijem. Ker je determinanta glavne 2×2 podmatrike B negativna,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

B *ni* pozitivno semidefinitna. Ker so vse determinante glavnih podmatrik A pozitivne,

$$4 > 0\ , \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ in } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 = 36 > 0,$$

je A pozitivno definitna.

Poiščimo razcep Choleskega matrike A. Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{b} & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

in

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\mathbf{b} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A' - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ter

$$A'' = 10 - \frac{1}{1}(-1)(-1) = 9,$$

torej $L_3 = \sqrt{9} = 3$. Končno

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Za ta L velja $LL^{\mathsf{T}} = A$.

3. [**25 točk**] Naj bosta A in B matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Označimo $A \oplus B := A \otimes I_2 + I_2 \otimes B$. Ali lahko matriko $(A \oplus B)^3$ diagonaliziramo? Če je odgovor da, poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da bo $(A \oplus B)^3 = PDP^{-1}$, če je odgovor ne, razloži, zakaj to ni mogoče.

Rešitev: Lastne vrednosti $A \oplus B$ so vsote lastnih vrednosti matrik A in B, pripadajoči lastni vektorji pa so Kroneckerjevi produkti lastnih vektorjev A in B. (To smo izpeljali na vajah.) Ker je $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4$, sta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -2$ lastni vrednosti A. Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{v}_1 = [1, 1]^{\mathsf{T}}$ in $\mathbf{v}_2 = [1, -1]^{\mathsf{T}}$. Ker je B zgornje trikotna, so njene lastne vrednosti na diagonali, torej sta $\mu_1 = 1$ in $\mu_2 = -1$ lastni vrednosti B. Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{u}_1 = [1, -1]^{\mathsf{T}}$ in $\mathbf{u}_2 = [1, 0]^{\mathsf{T}}$. Lastne vrednosti $A \oplus B$ so torej

$$\lambda_1 + \mu_1 = 3,\ \lambda_1 + \mu_2 = 1,\ \lambda_2 + \mu_1 = -1 \text{ in } \lambda_2 + \mu_2 = -3.$$

4×4 matrika $A \oplus B$ ima torej 4 različne lastne vrednosti, kar pomeni, da jo lahko diagonaliziramo. Pripadajoči lastni vektorji so

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $(A \oplus B)^3$ ima enake lastne vektorje, njene lastne vrednosti pa so tretje potence lastnih vrednosti matrike $A \oplus B$. Imamo torej

$$D = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} \text{ ter } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriko $(A \oplus B)^3$ lahko diagonaliziramo in velja $(A \oplus B)^3 = PDP^{-1}$.

4. [**25 točk**] V $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sta dani podmnožici

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AX = XA^2\}$$
$$\text{ter } V := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AX = X^2A\},$$

kjer je $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ali je katera od podmnožic U in V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$? Za vsako, ki je vektorski podprostor, poišči bazo in določi dimenzijo.

Rešitev: Naj bo $I \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ identična matrika. Velja

$$AI = I^2A = IA = A,$$

vendar

$$2A = A(2I) \neq (2I)^2A = 4A,$$

torej je $I \in V$, vendar $2I \notin V$. Podmnožica V zato ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, saj ni zaprta za množenje s skalarjem.

Kaj pa U? Vzemimo $X, Y \in U$, tj. taki 2×2 matriki U in V, da je $AX = XA^2$ ter $AY = YA^2$. Za linearno kombinacijo $\alpha X + \beta Y$ tedaj velja

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha XA^2 + \beta YA^2 = (\alpha X + \beta Y)A^2,$$

tj. $\alpha X + \beta Y \in U$ in U je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Da poiščemo bazo za U, bomo najprej (parametrično) opisali elemente U. Pišimo $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Ker je $A^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, iz $AX = XA^2$ dobimo

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{bmatrix}.$$

Edina rešitev tega sistema enačb pa je $a = b = c = d = 0$, tj. matrika X je v U natanko takrat, ko je $X = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Podmnožica U je torej trivialen (ničelni) podprostor, $U = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right\}$. Baza za U je prazna množica $\mathcal{B}_U = \emptyset = \{\}$, $\dim U = 0$.