Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Računski izpit iz Matematike 1

1. september 2022

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je dana s predpisom

$$\phi(p)(x) = p(x) + (x-1)p'(x+1).$$

a) (5 točk) Prepričaj se, da je ϕ linearna preslikava.

$$\phi(\alpha p+\beta q)(x) = (\alpha p+\beta q)(x) + (x-1)\cdot(\alpha p+\beta q)'(x+1) =$$
$$= \alpha p(x) + \beta q(x) + (x-1)\cdot(\alpha p'(x+1) + \beta q'(x+1)) =$$
$$= \underline{\alpha p(x) + (x-1)\cdot\alpha p'(x+1)} + \underline{\beta q(x) + (x-1)\cdot\beta q'(x+1)} =$$
$$= \underline{\phi(p)(x)} + \underline{\phi(q)(x)},$$

ϕ je torej linearna.

b) (10 točk) Zapiši matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}_3[x]$.

$p_0(x) = 1 \ldots \phi(p_0)(x) = 1 + (x-1)\cdot 0 = 1$

$p_1(x) = x \ldots \phi(p_1)(x) = x + (x-1)\cdot 1 = 2x-1$

$p_2(x) = x^2 \ldots \phi(p_2)(x) = x^2 + (x-1)\cdot 2(x+1) = 3x^2-2$

$p_3(x) = x^3 \ldots \phi(p_3)(x) = x^3 + (x-1)\cdot 3\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1} = 4x^3+3x^2-3x-3$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \\ A_\phi = & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array}$$

c) (10 točk) Poišči lastne vrednosti preslikave ϕ. Ali lahko ϕ diagonaliziramo?

Ker je A_ϕ zg. trikotna, so lastne vrednosti A_ϕ (in ϕ) na diagonali. Lastne vrednosti ϕ so torej: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = 4$.

Ker so le-te različne in je $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$, lahko ϕ diagonaliziramo.

2. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Utemelji: Če sta λ in μ lastni vrednosti kvadratne matrike A, potem je $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2$ lastna vrednost matrike $I\otimes A^2+A\otimes A+A^2\otimes I$.

Recimo, da je $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ ter $A\vec{u}=\mu\vec{u}$. Tedaj:

$$(I\otimes A^2+A\otimes A+A^2\otimes I)(\vec{v}\otimes\vec{u}) = \vec{v}\otimes\mu^2\vec{u}+\lambda\vec{v}\otimes\mu\vec{u}+\lambda^2\vec{v}\otimes\vec{u} =$$

$$=(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2)(\vec{v}\otimes\vec{u}).$$

b) (15 točk) Naj bo $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $I\otimes A^2+A\otimes A+A^2\otimes I$.

Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje A:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2=0\ldots\ \lambda_1=-\sqrt{2},\ \lambda_2=\sqrt{2},$$

pripadajoči lastni vektorji so:

- $\lambda_1=-\sqrt{2}\ \ldots\quad A+\sqrt{2}I\longrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \vec{v}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{bmatrix},$
- $\lambda_2=\sqrt{2}\ \ldots\quad A-\sqrt{2}I\longrightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1\\ 1\end{bmatrix}$

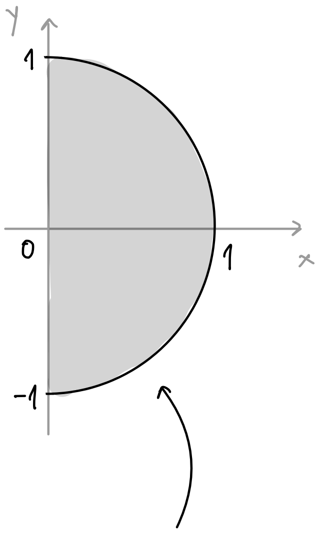
Lastne vrednosti in pripadajoči lastni vektorji $I\otimes A^2+A\otimes A+A^2\otimes I$ so torej:

$$\eta_1=6 \text{ in } \vec{v}_1\otimes\vec{v}_1=\begin{bmatrix}3+2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}+1\\ 1\end{bmatrix},\qquad \eta_2=2 \text{ in } \vec{v}_1\otimes\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-1\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\eta_3=2 \text{ in } \vec{v}_2\otimes\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1\\ 1\end{bmatrix},\qquad \eta_4=6 \text{ in } \vec{v}_2\otimes\vec{v}_2=\begin{bmatrix}3-2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}-1\\ 1\end{bmatrix}.$$

3. naloga (25 točk)

Skiciraj integracijsko območje in izračunaj dvakratni integral



Integracijsko območje.

$$I := \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (y^2 - x)\, dx \right) dy.$$

Prevedimo ta integral v polarne koordinate:

$x = r \cos\varphi$,

$y = r \sin\varphi$, $\quad \det(J\vec{F}) = r$.

Meje postanejo $r \in [0,1]$ ter $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

torej:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{1} \left(r^2 \sin^2\varphi - r\cos\varphi \right) r \, dr \right) d\varphi = (*).$$

Ker je $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$ in $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 2$, dobimo:

$$(*) = \int_{0}^{1} \left(\frac{\pi}{2} r^3 - 2r^2 \right) dr = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{3}.$$

4. naloga (25 točk)

Delec z maso m zaprt v pravokotnik s stranicama dolžin x in y ima na neizotropni ravnini energijo osnovnega stanja dano z

$$E(x,y) = \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Kolikšni naj bosta dolžini stranic tega pravokotnika, da bo pri fiksni ploščini $A_0 = xy > 0$ energija osnovnega stanja minimalna?
Namig: Poišči minimum funkcije $E(x,y)$ pri pogoju $xy = A_0$.

Zapišimo pripadajočo Lagrangeovo funkcijo:

$$L(x,y,\lambda) = E(x,y) - \lambda(xy - A_0) = \frac{\hbar}{4m}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \lambda(xy - A_0).$$

Torej:

$$L_x = \frac{\hbar}{\cancel{4}m}\cdot\left(-\frac{\cancel{4}}{x^3}\right) - \lambda y = 0 \;\dots\; -\frac{\hbar}{\lambda m} = yx^3$$

$$L_y = \frac{\hbar}{2\cancel{4}m}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{y^3}\right) - \lambda x = 0 \;\dots\; -\frac{\hbar}{\lambda m} = 2xy^3$$

$x \neq 0, y \neq 0$

$$yx^3 = 2xy^3 \;\dots\; x^2 = 2y^2 \;\dots\; x = \pm y\sqrt{2}$$

$$L_\lambda = A_0 - xy = 0$$

$$y^2\sqrt{2} = A_0 \;\dots\; y = \sqrt{\frac{A_0}{\sqrt{2}}}, \quad \text{zato} \quad x = \sqrt{A_0\sqrt{2}}.$$

(Rešitev pri $x = -y\sqrt{2}$ ni smiselna. Pri $x = 0$, $y = 0$ ali $\lambda = 0$ pa ne dobimo rešitev - zato tudi 'brezskrbno' deljenje zgoraj.)