

Ime in priimek _____

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. kolokvij iz Matematike 1

30. november 2023

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (10) Diagonaliziraj matriki A in B . Zapiši obe pripadajoči diagonalni in prehodni matriki.

b) (10) Naj bo \mathbf{u} lastni vektor A in \mathbf{v} lastni vektor B . Utemelji, da je $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ lastni vektor matrike $A \otimes B + A \otimes I + I \otimes B$. Izračunaj še lastne vrednosti matrike $A \otimes B + A \otimes I + I \otimes B$.

c) (5) Izračunaj najboljšo aproksimacijo M ranga 1 za matriko $A \otimes B + A \otimes I + I \otimes B$ glede na Frobeniusovo normo.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathcal{B} = \{1, 1 - x^2, 1 + x^4\}$ in $\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}_4[x]$. Definirajmo preslikavo

$$\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{s predpisom} \quad \phi(p) = \begin{bmatrix} p(-1) & p'(-1) \\ p(1) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

a) (5) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

b) (10) Zapiši matriko A_ϕ , ki pripada preslikavi ϕ glede na bazo \mathcal{B} prostora \mathcal{V} ter standardno bazo za $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

c) (10) Določi bazi za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\text{im}(\phi)$.

3. naloga (25 točk)

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ opazujemo podmnožici

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : XA + AX = 0\} \text{ ter } W := \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : XAX = X\}.$$

Katere od teh podmnožic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$? Zakaj oz. zakaj ne? Za vsak vektorski podprostor poišči bazo in določi dimenzijo!

2. naloga (25 točk)

Ali je katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \\ 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 6 & -10 & 5 \\ -2 & 5 & -14 \end{bmatrix}$$

negativno definitna? Za vsako negativno definitno matriko $X \in \{A, B\}$ poišči razcep Choleskega za $-X$.