Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

2. Računski izpit iz Matematike 1

7. februar 2024

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

Ali je katera od matrik

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna? Za vsako pozitivno definitno matriko poišči rezcep Choleskega.

Rešitev : Za matriko A izračunamo, da so glavne poddeterminante enake $D_1 = 4$, $D_2 = 12$ in $D_3 = -40$. Po Sylvestrovem kriteriju A torej ni PD.

Za matriko B lahko tudi uporabimo Sylvestrov kriterij, da ugotovimo da je PD, vendar pa tudi (realen) razcep Choleskega je veljaven argument, da je matrika PD. S postopkom lahko izračunamo

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

in tudi preverimo, da velja $LL^{\mathsf{T}} = B$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = [1, 2]^\mathsf{T}$. Definirajmo preslikavo

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{s predpisom} \quad \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{a}.$$

a) (5 točk) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.
Rešitev :

b) (10 točk) Zapiši matriko A_ϕ, ki pripada preslikavi ϕ glede na standardni bazi $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^4$.
Rešitev : Direktno lahko izračunamo

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potem lahko direktno preberemo

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) (10 točk) Določi dimenziji in bazi za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\mathrm{im}(\phi)$.
Rešitev : Gaussova eliminacija da

$$A_\phi \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimenziji jedra in slika sta enaka 1, napeta pa sta na vektorja

$$\ker(\phi) = \mathcal{L}(\mathbf{a})$$

in

$$\mathrm{im}(\phi) = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

3. naloga (25 točk)

Izračunaj masno središče območja

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\}.$$

Rešitev : Najbolj smiselno je uporabiti cilndrične koordinate. V cilindričnih koordinatah so meje območja $\phi \in [0,2\pi]$, $r \in [0,1]$ in (glede na dan r) $z \in [0, r-r^2]$. Masa oz. prostornina je

$$m = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=0}^{r-r^2} r dz dr d\phi = \ldots = \frac{\pi}{24}$$

Glede na simetrijo lahko sklepamo, da sta x in y koordinati masnega središča enaki

$$x^* = y^* = \frac{1}{m} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=0}^{r-r^2} \cos(\phi) r^2 dz dr d\phi = \ldots = \frac{6}{5\pi},$$

z-koordinata pa je enaka

$$z^* = \frac{1}{m} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=0}^{r-r^2} z r dz dr d\phi = \ldots = \frac{1}{10}.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivno definitna simetrična matrika in $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor stolpec. Definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}.$$

Poiskati želimo ekstreme funkcije f pri pogoju

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}A^{-1}\mathbf{x} = 1.$$

a) (5 točk) Zapiši ustrezno Lagrangeovo funkcijo.
Rešitev : Lagrangeova funkcija je

$$L = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}A^{-1}\mathbf{x} - 1)$$

b) (5 točk) Odvajaj Lagrangeovo funkcijo.
Rešitev : Odvod je enak

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T} - 2\lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}A^{-1}$$

ker je A in s tem A^{-1} simetrična matrika.

c) (15 točk) Poišči (splošna) izraza za rešitev problema (za minimum in maksimum).
Rešitev : Če obrnemo enačbo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ dobimo

$$A\mathbf{x} = \frac{1}{2\lambda}\mathbf{b}$$

od koder lahko izrazimo

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\lambda}A^{-1}\mathbf{b}$$

Če to vstavimo v pogoj dobimo

$$(2\lambda)^2 = \mathbf{b}^\mathsf{T}A^\mathsf{T}A^{-1}A\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathsf{T}A\mathbf{b},$$

končna rešitev pa je

$$\mathbf{x}^* = \pm\frac{A^{-1}\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^\mathsf{T}A\mathbf{b}}}$$

Maksimum je tako $\frac{A\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^\mathsf{T}A\mathbf{b}}}$, minimum pa $-\frac{A\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^\mathsf{T}A\mathbf{b}}}$