Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

	naloge 1-4	naloge 5-8	Skupaj
točke			

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL
26. januar 2023

Pri vsaki od nalog 1.-4. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

1. Kaj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z normiranimi lastnimi vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, ki zaporedoma pripadajo lastnim vrednostim -1, 1 in 2. Označimo z $U = \begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matriko, ki ima po stolpcih zapisane vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, in $D = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike U.

   (4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike A.

   (4 točke) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $A \otimes D$.

   Katere od naslednjih trditev so resnične za poljuben izbor vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z omenjenimi lastnostmi?

   A. $A = UD'U^{-1}$, kjer je $D' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

   B. $\det(A) = -2$

   C. Matrika U ni nujno obrnljiva.

   D. Matrika U je ortogonalna.

   E. Za matriko A obstaja razcep Choleskega.

   F. UDU^{-1} je Schurov razcep matrike A.

   G. UDU^{-1} je razcep singularnih vrednosti matrike A.

   H. Najboljša aproksimacija matrike A ranga 1 v Frobeniusovi normi je enaka $2\vec{c}^{\mathsf{T}}\vec{c}$.

   I. Najboljša aproksimacija matrike A ranga 2 v Frobeniusovi normi je enaka matriki A.

2. Katere od naslednjih matrik so ortogonalne na matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

v Frobeniusovem skalarnem produktu?

A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Katere od naslednjih trditev so resnične za vsak vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}_6[x]$ dimenzije 6?

A. V je vektorski prostor.

B. $V = \mathbb{R}_6[x]$

C. Če so $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6 \in V$, potem je V enak linearni ogrinjači $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$.

D. Če je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$ baza V, je baza tudi $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_1\}$.

E. Če je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6\}$ baza V in $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_6[x]$ poljuben element, ki ni v V, potem je $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6, \mathbf{u}\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_6[x]$.

F. Če so $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4 \in V$, potem je linearna ogrinjača $U = \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ vektorski podprostor dimenzije 4 v vektorskem podprostoru V.

G. Vsaka baza V vsebuje polinom stopnje 6.

H. Obstaja injektivna linearna preslikava $\tau\colon \mathbb{R}_6[x] \to V$.

I. Ne obstaja injektivna preslikava $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^6$.

4. Opazujemo vrednosti poljubne dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na ploskvi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Vemo, da na tej ploskvi doseže f svojo največjo vrednost v točki $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ in svojo najmanjšo vrednost v točki $\mathbf{b} = (0, \sqrt{2}, 0)$. Katere od naslednjih trditev so resnične?

A. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ in gradient funkcije f v točki $\mathbf{b}$ sta oba enaka $\mathbf{0}$.

B. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ in gradient funkcije f v točki $\mathbf{b}$ sta vzporedna.

C. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ in gradient funkcije f v točki $\mathbf{b}$ sta pravokotna.

D. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je vzporeden vektorju $(1, 2, 3)^\mathsf{T}$.

E. Gradient funkcije f v točki $\mathbf{a}$ je vzporeden vektorju $(1, 0, 6)^\mathsf{T}$.

F. f ima v točki $\mathbf{a}$ lokalni maksimum.

G. f ima v točki $\mathbf{b}$ lokalni minimum.

H. O lokalnih ekstremih funkcije f v točki $\mathbf{a}$ ne moremo trditi ničesar.

I. $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{b})$

Pri vsaki od nalog 5.-7. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

5. (20 točk) Naj bo A simetrična pozitivno definitna $n \times n$ matrika in I identična matrika velikosti $n \times n$.

   A. Pokažite, da je matrika $A \otimes (2I)$ tudi simetrična pozitivno definitna matrika.

   B. Naj bo $A = LL^{\mathsf{T}}$ razcep Choleskega matrike A. Zapišite in utemeljite razcep Choleskega matrike $A \otimes (2I)$.

6. (10 točk) Naj bo V vektorski prostor, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ dve njegovi poljubni bazi in $\tau\colon V \to V$ neničelna linearna preslikava. Naj bo B matrika, ki pripada τ iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}$ in naj bo C matrika, ki pripada τ iz baze $\mathcal{C}$ v bazo $\mathcal{C}$. Ali je lahko $B = 3C$?

   Če da, navedite primer takšnega vektorskega prostora V in preslikave τ. Če ne, zapišite utemeljitev.

7. (20 točk) Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ omejeno območje, ki ga omejujeta krivulji $y = x$ in $x = -y^2$. V spodnjih deset kvadratkov zapišite ustrezne meje integralov in funkcij, ki jih integriramo. Poleg tega razločno narišite sliko območja $\mathcal{D}$ in utemeljite vse korake pri določanju mej v integralih.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx dy = \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\square}^{\square} \left(\int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

8. (20 točk) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Želimo poiskati najmanjšo vrednost $\|\vec{x}\|^2$ med vsemi vektorji, za katere je $A\vec{x} \geq \vec{b}$.

(5 točk) Zapišite Lagrangevo funkcijo omenjenega problema in njeno definicijsko območje.

(5 točk) Zapišite prirejeno funkcijo omenjenega problema in njeno definicijsko območje.

(10 točk) Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje omenjenega problema.