Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Računski izpit iz Matematike 1

26. januar 2024

Čas pisanja: **90 minut**. *Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je* **strogo** *prepovedano.*

1. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Utemelji: Če sta λ in μ lastni vrednosti matrike A, potem je $\lambda(\lambda^2+\mu^2)$ lastna vrednost matrike $A\otimes A^2 + A^3\otimes I$.

Recimo $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ ter $A\vec{v} = \mu\vec{v}$. Tedaj

$$(A\otimes A^2 + A^3\otimes I)(\vec{u}\otimes\vec{v}) = (A\otimes A^2)(\vec{u}\otimes\vec{v}) + (A^3\otimes I)(\vec{u}\otimes\vec{v}) =$$

$$= (A\vec{u})\otimes(A^2\vec{v}) + (A^3\vec{u})\otimes(I\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\otimes(\mu^2\vec{v}) + (\lambda^3\vec{u})\otimes\vec{v} =$$

$$= \lambda\mu^2(\vec{u}\otimes\vec{v}) + \lambda^3(\vec{u}\otimes\vec{v}) = (\lambda\mu^2+\lambda^3)(\vec{u}\otimes\vec{v}) = \lambda(\lambda^2+\mu^2)(\vec{u}\otimes\vec{v}),$$

$\vec{u}\otimes\vec{v}$ je torej lastni vektor $A\otimes A^2 + A^3\otimes I$ z lastno vrednostjo $\lambda(\lambda^2+\mu^2)$.

b) (15 točk) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A\otimes A^2 + A^3\otimes I$, če je A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo najprej l. vred. in l. vekt. A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \ \ldots \ \lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = \sqrt{2}.$$

- $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \overset{x_2=1}{=} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda_2 = \sqrt{2}$, A je simetrična, torej $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Lastne vrednosti in lastni vektorji $A\otimes A^2 + A^3\otimes I$ so po (a) torej:

$$\lambda_1(\lambda_1^2+\lambda_1^2) = -4\sqrt{2}, \quad \vec{v}_1\otimes\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1(\lambda_1^2+\lambda_2^2) = -4\sqrt{2}, \quad \vec{v}_1\otimes\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2(\lambda_2^2+\lambda_1^2) = 4\sqrt{2}, \quad \vec{v}_2\otimes\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 3-2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2(\lambda_2^2+\lambda_2^2) = 4\sqrt{2}, \quad \vec{v}_2\otimes\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$W = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \,:\, p(-x) = p(x)\}$$

vektorski podprostor *sodih* polinomov v $\mathbb{R}_4[x]$. (*Ni treba* preverjati, da je W vektorski podprostor v $\mathbb{R}_4[x]$.) Definirajmo preslikavo

$$\phi\colon W \to W \quad \text{s predpisom} \quad \phi(p)(x) = x^2 p''(x) + x p'(x).$$

a) (5 točk) Izberi (in zapiši) bazo $\mathcal{B}$ vektorskega prostora W. Določi $\dim(W)$.

Za $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ iz $p(-x) = p(x)$ dobimo $b=0$ in $d=0$. Torej $p(x) = ax^4 + cx^2 + e$, kar pomeni, da je $\mathcal{B} = \{1, x^2, x^4\}$ ena možna baza za W. $\dim(W) = |\mathcal{B}| = 3$.

b) (5 točk) Utemelji, da je definicija ϕ smiselna, tj. $\phi(p) \in W$ za vsak $p \in W$. Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

Najprej linearnost: $\boxed{\phi(\alpha p + \beta q)(x)} = x^2(\alpha p + \beta q)''(x) + x(\alpha p + \beta q)'(x) =$

$= \alpha x^2 p''(x) + \beta x^2 q''(x) + \alpha x p'(x) + \beta x q'(x) = \boxed{\alpha \phi(p)(x) + \beta \phi(q)(x)}.$

Smiselnost sedaj sledi iz linearnosti in izračuna ϕ na baznih polinomih spodaj.

c) (5 točk) Zapiši matriko A_ϕ, ki pripada preslikavi ϕ glede na bazo $\mathcal{B}$ prostora W.

$$\left.\begin{aligned} \phi(1)(x) &= 0 \\ \phi(x^2)(x) &= x^2 \cdot 2 + x \cdot 2x = 4x^2 \\ \phi(x^4)(x) &= x^2 \cdot 12x^2 + x \cdot 4x^3 = 16x^4 \end{aligned}\right\} \quad A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

d) (10 točk) Poišči lastne vrednosti ter pripadajoče lastne polinome preslikave ϕ. Koliko je $\dim(\ker \phi)$?

Ker je A_ϕ diagonalna, so njene lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ ter $\lambda_3 = 16$. To so tudi lastne vrednosti ϕ. Pripadajoči lastni polinomi so tisti iz c) dela: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x^2$ ter $p_3(x) = x^4$.

$\dim(\ker \phi) = \dim(N(A_\phi)) = 3 - \operatorname{rang}(A_\phi) = 3 - 2 = 1.$

3. naloga (25 točk)

Telo T v $\mathbb{R}^3$ je dano z neenačbama

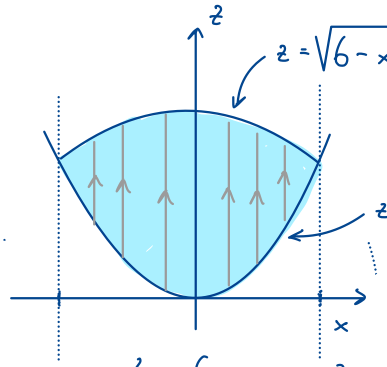
$$z \geq x^2 + y^2 \ \text{ in } \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 6.$$

Izračunaj

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz.$$

Namig: Uporabi valjne koordinate.

Projekcija območja na xz-ravnino:



$z = \sqrt{6 - x^2 - y^2} = \sqrt{6 - r^2}$

meji za z

$z = x^2 + y^2 = r^2$

Presek obeh robnih ploskev je pri: $z + z^2 = 6 \ \ldots \ z^2 + z - 6 = 0$

namesto x^2+y^2 vstavimo $z = x^2 + y^2$

$(z-2)(z+3) = 0$

$z = 2$ ali $z = -3$

$z = r^2 \ \ldots \ z = r^2 = 2 \ \ldots \ r = \sqrt{2}$

zg. meja za r.

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,r\,dz \right) dr \right) d\varphi = \cancel{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r \frac{z^2}{\cancel{2}} \Bigg|_{z=r^2}^{z=\sqrt{6-r^2}} \right) dr =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} r\left(6 - r^2 - r^4\right) dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(6r - r^3 - r^5\right) dr =$$

$$= \pi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = \pi\left(6 - 1 - \frac{4}{3}\right) = \frac{11\pi}{3}.$$

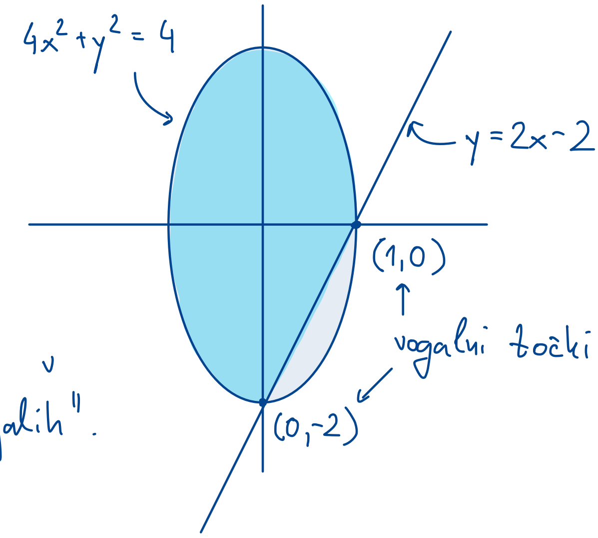
4. naloga (25 točk)

Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x,y) = 2x + y$$

pri pogojih

$$4x^2 + y^2 \leq 4 \ \text{ in } \ y \geq 2x - 2.$$



Ločeno poiščemo kandidate za ekstreme v notranjosti, na robnih krivuljah in v "vogalih".

- notranjost: $\operatorname{grad} f = [2,1] \neq [0,0]$,
  kandidatov v notranjosti ni.

- robna elipsa $4x^2+y^2=4$ oz. $4x^2+y^2-4=0$:

$$L(x,y,\lambda) = 2x+y-\lambda(4x^2+y^2-4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2-8x\lambda = 0 \ \ldots \ \frac{1}{\lambda} = 4x \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1-2y\lambda = 0 \ \ldots \ \frac{1}{\lambda} = 2y \end{aligned}\right\} \ y = 2x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4x^2+y^2-4) = 0 \ \ldots \ 4x^2+4x^2 = 4 \ \ldots \ x^2 = \frac{1}{2} \ \ldots \ \underline{x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_{1,2} = \pm\sqrt{2}}$$

Dva kandidata $T_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{2}\right)$.

Ali to ustreza 2. neenakosti? Ustreza!

- robna daljica $y=2x-2$ $\quad 2x-y-2=0$:

$$L(x,y,\lambda) = 2x+y-\lambda(2x-y-2)$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2-2\lambda = 0 \ \ldots \ \lambda = 1 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1+\lambda = 0 \ \ldots \ \lambda = -1 \end{aligned}\right\} \text{protislovje} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \ldots \qquad\qquad \end{aligned}\right\} \text{ta sistem nima rešitev}$$

(x,y)	T_1	T_2	$(1,0)$	$(0,-2)$
$f(x,y)$	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	2	-2

<u>največja in najmanjša vrednost</u>